http://www.xriadiat.com **DL1: E** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **La logique**
- ✓ **ENSEMBLES ET APPLICATIONS**

Exercice1 : On considère les propositions suivantes $P:"\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):x^2\geq x"$

$Q:"\left(\forall a\in\left[0;+\infty\right[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\prec 1"$ et $R:"P\Rightarrow Q"$

1) Donner : $\overline{P}$; $\overline{Q}$ et $\overline{R}$

2) Montrer que P est fausse

3) Déterminer la valeur de vérité de : Q

4) Déterminer la valeur de vérité de : R

Solution :1) $\overline{P}:"\left(\exists x\in\left]0;+\infty\right[\right):x^2\prec x"$

$\overline{Q}:"\left(\exists a\in\left[0;+\infty\right[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\geq 1"$ et $\overline{R}$ $:"P\ et\ \overline{Q}"$

$\overline{R}$ $:"\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):x^2\geq x\ et\left(\exists a\in\left[0;+\infty\right[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\geq 1"$

2)Montrons que P est fausse

$\overline{P}:"\left(\exists x\in\left]0;+\infty\right[\right):x^2\prec x"$ est vraie car :$"\left(\exists x=\dfrac{1}{2}\in\left]0;+\infty\right[\right):\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\prec\dfrac{1}{2}"$

Donc : $\overline{P}$:est vraie et par suite : P est une proposition fausse

3) Déterminons la valeur de vérité de : Q

On a :$\overline{Q}:"\left(\exists a\in\left[0;+\infty\right[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\geq 1"$ est vraie car :$"\left(\exists a=1\in\left[0;+\infty\right[\right):\dfrac{2\times 1}{1+\sqrt{1}}=1\geq 1"$

Par suite : Q est une proposition fausse

4) Déterminons la valeur de vérité de : R

On a : $R:"P\Rightarrow Q"$ avec : P est une proposition fausse et Q est une proposition fausse

Donc : d'après le tableau de vérité de : $"\Rightarrow"$

R est une proposition vraie

Exercice2 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \left|\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|\leq\dfrac{1}{2}x^2$.

Solution : 1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1^2-\sqrt{x^2+1}^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{1-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}^2}=\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$$

Donc : $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|=\left|\dfrac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\right|=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Car x^2 $et\sqrt{x^2+1}+x^2+1$ sont positifs

On a : $x^2 \geq 0$ donc : $x^2+1\geq 1$ donc : $\sqrt{x^2+1}\geq\sqrt{1}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x^2+1}\geq 1$

De : $\sqrt{x^2+1}\geq 1$ et $x^2+1\geq 1$ par somation on a donc : $\sqrt{x^2+1}+x^2+1\geq 2$

Donc : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\leq\dfrac{1}{2}$

Donc : $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\leq\dfrac{1}{2}x^2$

D'où : $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|\leq\dfrac{1}{2}x^2$

Exercice3 : 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

2) Déduire que : $\forall(a;b;c;d)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\geq 6$

3) Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$

4) Soit $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: on pose : $x=a+\dfrac{1}{b}$; $y=b+\dfrac{1}{c}$ et $z=c+\dfrac{1}{a}$

Montrer que : $x\geq 2$ ou $y\geq 2$ ou $z\geq 2$

Solution : 1) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x\in\mathbb{R}^*$: $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\dfrac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x$

$\Leftrightarrow x^2+1-2x\geq 0\Leftrightarrow(x-1)^2\geq 0$; (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

2) Déduction : Soit : $(a;b;c;d)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: On a : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

Donc : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{\frac{a}{b}}\geq 2$ c'est à dire : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$ $\boxed{1}$

De même on a aussi : $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 2$ $\boxed{2}$ et de même on a aussi : $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geq 2$ $\boxed{3}$

$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}$ membre a membre donne : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\geq 6$ (Vraie)

3) Montrons que : $\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$

Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b;c;d)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9\Leftrightarrow 1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+1\geq 9$

$\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\geq 6$ (Vraie)

Donc : $\forall(a;b;c;d)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$

4) Soit $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$ Montrons que : $x\geq 2$ ou $y\geq 2$ ou $z\geq 2$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x\prec 2$ ou $y\prec 2$ ou $z\prec 2$

$$\begin{cases} x \prec 2 \ (1) \\ y \prec 2 \ (2) \\ z \prec 2 \ (3) \end{cases} \overset{(1)+(2)+(3)}{\Rightarrow} x+y+z \prec 8 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right) \prec 8 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right) \prec 8 \text{©}$$

Or on a : $\begin{cases} a+\frac{1}{a} \geq 2 \ (1) \\ b+\frac{1}{b} \geq 2 \ (2) \\ c+\frac{1}{c} \geq 2 \ (3) \end{cases} \overset{(1)+(2)+(3)}{\Rightarrow} \left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right) \geq 8$ contradiction avec©

Donc : $x \geq 2$ ou $y \geq 2$ ou $z \geq 2$

Exercice4 : 1) Montrer que : $|x-1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $x \neq \sqrt{5} \ et \ x \neq -\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{4+x^2}} \neq 1$

3) Montrer que $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $|2x^2+5xy+3y^2| \leq 3 \Rightarrow |x+y| \leq \sqrt{3} \ ou \ |2x+3y| \leq \sqrt{3}$

Solution : 1) $|x-1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+1 \leq x-1+1 \leq \frac{1}{2}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+1 \leq x+1 \leq \frac{3}{2}+1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x+1 \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x-1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\frac{3}{\sqrt{4+x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \ ou \ x = -\sqrt{5}$

$\frac{3}{\sqrt{4+x^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4+x^2} = 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4+x^2}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 4+x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \ ou \ x = -\sqrt{5}$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq \sqrt{5} \ et \ x \neq -\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{4+x^2}} \neq 1$

3) Soit : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $|x+y| \succ \sqrt{3} \ et \ |2x+3y| \succ \sqrt{3} \Rightarrow |2x^2+5xy+3y^2| \succ 3$

$|x+y| \succ \sqrt{3} \ et \ |2x+3y| \succ \sqrt{3} \Rightarrow |2x+3y||x+y| \succ \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\Rightarrow |(2x+3y)(x+y)| \succ 3$

$\Rightarrow |2x^2+3xy+2xy+3y^2| \succ 3$

$\Rightarrow |2x^2+5xy+3y^2| \succ 3$

Donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x+y| \succ \sqrt{3} \ et \ |2x+3y| \succ \sqrt{3} \Rightarrow |2x^2+5xy+3y^2| \succ 3$

Alors : Par contraposition : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

$|2x^2+5xy+3y^2| \leq 3 \Rightarrow |x+y| \leq \sqrt{3} \ ou \ |2x+3y| \leq \sqrt{3}$

Exercice5 : 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 Par 5 est : $E = \{0;1;4\}$

2) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12} \notin \mathbb{N}$

Solution : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$: On a : 5 cas possibles seulement pour n

$n = 5k$ ou $n = 5k+1$ ou $n = 5k+2$ ou $n = 5k+3$ ou $n = 5k+4$ avec $k \in \mathbb{N}$

1érecas : $n=5k$ alors $n^2=(5k)^2=25k^2=5\times(5k^2)=5k'=5k'+0$

Donc : 0 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

2érecas : $n=5k+1$ alors $n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5\times(5k^2+2k)+1=5k'+1$

Donc : 1 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

3érecas : $n=5k+2$ alors $n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5\times(5k^2+4k)+4=5k'+4$

Donc : 4 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

4érecas : $n=5k+3$ alors $n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=(25k^2+30k+5)+4$

$n^2=(5k+3)^2=5\times(5k^2+6k+1)+4=5k'+4$

Donc : 4 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

5érecas : $n=5k+4$ alors $n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=(25k^2+40k+15)+1$

$n^2=(5k+4)^2=5\times(5k^2+8k+3)+1=5k'+1$

Donc : 1 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

Donc : L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 Par 5 est : $E=\{0;1;4\}$

2)Nous raisonnons par l'absurde en supposant : $\exists k\in\mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12}\in\mathbb{N}$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12}=n$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$; $5k+12=n^2$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$; $5k+10+2=n^2$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$; $5(k+2)+2=n^2$

Donc : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que 2 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

Nous obtenons donc une contradiction avec la faite que : L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 par 5 est : $E=\{0;1;4\}$ car 2 ne peut pas être le reste de la division euclidienne de n^2 par 5

Exercice6 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$.

Solution : Notons P(n) la proposition : "$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^1(2\times1+1)=-3$ et $(-1)^1(1+1)-1=-2-1=-3$

Donc P (1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^{n+1}(n+2)-1$??

Remarque : $(-1)^{n+1}=(-1)^n\times(-1)^1=-(-1)^n$

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)+(-1)^{n+1}(2n+2+1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1+(-1)^{n+1}(2n+3)$

$S_{n+1}=(-1)^{n+1}\times(-1)(n+1)+(-1)^{n+1}(2n+3)-1=(-1)^{n+1}(-n-1+2n+3)-1$

$S_{n+1}=(-1)^{n+1}(n+2)-1$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_3): $\sqrt{x-1}\geq x-7$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation (I_3) : $\sqrt{x-1}\geq x-7$:

$D_3=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}=[1;+\infty[$

Le tableau de signe de l'expression $x-7$ est :

x	$-\infty$ 7 $+\infty$
$x-7$	$-$ 0 $+$

Soit $x\in[1;+\infty[$ et S l'ensemble des solutions de (I_3)

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\geq x-7$

1 cas : si $x\in[1;7[$ alors $x-7\prec 0$

Donc : l'Inéquation est vraie pour tout $x\in[1;7[$

Donc $S_1=[1;7[$

2 cas : si $x\in[7;+\infty[$ alors $x-7\geq 0$

Donc : $x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\geq x-7\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}\right)^2\leq(x-7)^2$

$\Leftrightarrow x-1-(x^2-14x+49)\geq 0\Leftrightarrow -x^2+15x-50\geq 0\Leftrightarrow x\in[5;10]$ Donc $S_2=[5;10]\cap[7;+\infty[=[7;10]$

Donc : $S=S_1\cup S_2=[1;7[\cup[7;10]=[1;10]$

Exercice8 : Monter que : $\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\ A-C=B-C\end{cases}\Rightarrow A\subset B$

Solution : On suppose que : $A\cap C\subset B\cap C$ et $A-C=B-C$

Montrons que $A\subset B$?

Soit $x\in A$

Si $x\in C\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in B\cap C$ C'est-à-dire : $x\in B$

Si $x\notin C\Rightarrow x\in A-C\Rightarrow x\in B-C$ C'est-à-dire : $x\in B$

Dans tous les cas, on conclut que : $A\subset B$

Exercice9 : On rappelle que l'on note : $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

1) Montrer que :

a) $(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=A\cap B\cap\overline{C}$

b) $(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=A\cap C\cap\overline{B}$

2) En déduire que $(A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C)=A\cap(B\Delta C)$

Solution :1) a) $(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=(A\cap B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{C}\right)=\left(A\cap B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$

$=\left(\left(A\cap\overline{A}\right)\cap B\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$ or : $A\cap\overline{A}=\varnothing$

$=(\varnothing\cap B)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)=\varnothing\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$ car $\varnothing\cap B=\varnothing$

$= A\cap B\cap \overline{C}$ car $\varnothing\cup\left(A\cap B\cap \overline{C}\right)=A\cap B\cap \overline{C}$

Donc : $(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=A\cap B\cap \overline{C}$

b) $(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cap C)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\left(A\cap C\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$

$=\left(\left(A\cap\overline{A}\right)\cap C\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$ or : $A\cap\overline{A}=\varnothing$

$=(\varnothing\cap C)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)=\varnothing\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$ car $\varnothing\cap C=\varnothing$

$=A\cap C\cap\overline{B}$ car $\varnothing\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)=A\cap C\cap\overline{B}$

Donc : $(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=A\cap C\cap\overline{B}$

2) $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=\left((A\cap B)\setminus(A\cap C)\right)\cup\left((A\cap C)\setminus(A\cap B)\right)$

$=(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\cup(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)$

$=\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)=A\cap\left(\left(B\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{B}\right)\right)$

$=A\cap\left((B-C)\cup(C-B)\right)=A\cap(B\Delta C)$

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=\begin{cases}1 & si:\ x\prec 0\\ 1+x & si:\ x\geq 0\end{cases}\end{array}$

1) Déterminer les ensembles suivants : $f(\mathbb{R})$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}(\{1\})$; $f^{-1}(\{-1\})$; $f^{-1}(]1;2])$

2) a) f est injective ? b) f est-elle surjective ?

Solution : 1) a) On a :

$f(\mathbb{R})=\{f(x)\in\mathbb{R}\,/\,x\in\mathbb{R}\}$

Comme : $\mathbb{R}=\mathbb{R}_-^*\cup\mathbb{R}^+$ alors :

$f(\mathbb{R})=f\left(\mathbb{R}_-^*\cup\mathbb{R}^+\right)=f\left(\mathbb{R}_-^*\right)\cup f\left(\mathbb{R}^+\right)$

On a : $f\left(\mathbb{R}_-^*\right)=\{1\}$ et $f\left(\mathbb{R}^+\right)=\left\{x+1\,/\,x\in\mathbb{R}^+\right\}=[1;+\infty[$

Ce qui donne : $f(\mathbb{R})=\{1\}\cup[1;+\infty[=[1;+\infty[$

b) $f^{-1}(\{0\})=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in\{0\}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)=0\right\}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $f(x)=0$

Sur : $\mathbb{R}_-^*$ l'équation : $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

Sur : $\mathbb{R}^+$ $f(x)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1\notin\mathbb{R}^+$

D'où : l'équation : $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}(\{0\})=\varnothing$

c) $f^{-1}(\{1\})=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in\{1\}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)=1\right\}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $f(x)=1$

$\forall x\in\mathbb{R}_-^*\ f(x)=1$

Sur : $\mathbb{R}^+$ $f(x)=1\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0\in\mathbb{R}^+$

On obtient alors : $f^{-1}(\{1\})=\{0\}\cup\mathbb{R}_-^*=\mathbb{R}^-$

d) $f^{-1}(\{-1\})=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in\{-1\}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)=-1\right\}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $f(x)=-1$

Sur : $\mathbb{R}_-^*$ l'équation : $f(x)=-1$ n'admet pas de solution.

Sur : $\mathbb{R}^+$ $f(x)=-1 \Leftrightarrow x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2 \notin \mathbb{R}^+$

D'où : l'équation : $f(x)=-1$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}(\{-1\})=\varnothing$

e) $f^{-1}(]1;2])=\{x\in\mathbb{R} / f(x)\in]1;2]\}$

$f^{-1}(]1;2])=\{x\in\mathbb{R} / 1 \prec x+1 \leq 2\}$

Il est clair qu'il n'existe pas de réels négatifs ayant une image positive.

$\forall x\in\mathbb{R}^+$: $1\prec x+1\leq 2 \Leftrightarrow 0\prec x\leq 1$

Ainsi : $f^{-1}(]1;2])=]0;1]$

2) a) - f n'est pas injective car :

$f(-2)=f(-1)=1$ et $-2\neq -1$

b) f n'est pas surjective car par exemple 0 et -1 n'ont pas d'antécédents. En général, tous les éléments de l'intervalle $]-\infty;1[$ n'ont pas d'antécédents par l'application f.

Exercice11 : Soit L'application f : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+2x+2 \end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f([-1;+\infty[)$ et $f^{-1}([5;10])$

Solution :1) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x+2=0$

$\Delta=2^2-4\times 2=4-8=-4\prec 0$

Donc : $S=\varnothing$

2) $f(x)=0$ n'a pas de solutions donc $0\in\mathbb{R}$ n'a pas d'antécédents

Donc : f n'est est-pas surjective

3) Méthode : pour les fonctions : $f(x)=ax^2+bx+c$

$2=c\in\mathbb{R}$ (Ensemble d'arrivé) : on Recoud l'équation $f(x)=2$

$f(x)=2 \Leftrightarrow x^2+2x+2=2 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \ ou \ \ x=-2$

Donc : $f(0)=2=f(-2)$ mais $0\neq -2$

Donc : f n'est pas injective

4) Déterminer : $f([-1;+\infty[)$ et $f^{-1}([5;10])$

a) $f([-1;+\infty[)=?$

$f(x)=x^2+2x+2$ Déterminons la forme canonique de $f(x)$

$f(x)=(x^2+2x)+2=(x+1)^2-1^2+2=(x+1)^2+1$

Remarque : $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ et $x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$f([-1;+\infty[)=\{f(x) / x\in[-1;+\infty[\}$

$x\in[-1;+\infty[\Leftrightarrow x\geq -1 \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+1\geq 1 \Leftrightarrow f(x)\geq 1$

$x \in [-1;+\infty[\Leftrightarrow f(x) \in [1;+\infty[$ Donc : $f([-1;+\infty[) = [1;+\infty[$

b) $f^{-1}([5;10])$:

$f^{-1}([5;10]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [5;10]\} = \{x \in \mathbb{R} / 5 \le f(x) \le 10\}$

$x \in f^{-1}([5;10]) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $5 \le f(x) \le 10 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $5 \le (x+1)^2 + 1 \le 10 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $4 \le (x+1)^2 \le 9$

$x \in f^{-1}([5;10]) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2 \le |x+1| \le 3 \Leftrightarrow 2 \le x+1 \le 3$ ou $2 \le -x-1 \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$ ou $3 \le -x \le 4$

$x \in f^{-1}([5;10]) \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$ ou $-4 \le x \le -3 \Leftrightarrow x \in [1;2]$ ou $x \in [-4;-3]$

Donc : $f^{-1}([5;10]) = [1;2] \cup [-4;-3]$

Exercice12 : Soit l'application g : $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}^*$

$x \mapsto g(x) = \frac{9}{2x-1}$

1)Montrer que g est une bijection. Déterminer son application réciproque

2) Déterminer $g^{-1}([-5;2])$

Solution : 1) $g(x) = \frac{9}{2x-1}$: Soient $x_1 \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et $x_2 \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{9}{2x_1+1} = \frac{9}{2x_2+1} \Rightarrow \frac{1}{2x_1+1} = \frac{1}{2x_2+1} \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Ainsi on a montré que g est injective.

2)Soit $y \in \mathbb{R}^*$: Résolvons dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ l'équation : $f(x) = y$

Soit : $y \in \mathbb{R}^*$: $g(x) = y \Leftrightarrow \frac{9}{2x-1} = y \Leftrightarrow 9 = y(2x-1) \Leftrightarrow 9 = y(2x-1) \Leftrightarrow 2xy - y = 9$

$\Leftrightarrow 2xy = 9 + y \Leftrightarrow 2xy = 9 + y$ Comme $y \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow x = \frac{9+y}{2y}$ Bien défini. On doit aussi montrer que : $x = \frac{9+y}{2y} \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

C'est-à-dire : On doit montrer que : $\frac{9+y}{2y} \ne \frac{1}{2}$??

On raisonne par l'absurde, c-à-d on suppose que : $\frac{9+y}{2y} = \frac{1}{2}$

$\frac{9+y}{2y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(9+y) = 2y \Leftrightarrow 18 + 2y = 2y \Leftrightarrow 18 = 0$ Ce qui est impossible.

On déduit alors : $\forall y \in \mathbb{R}^*$ $\exists x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} / g(x) = y$

Ceci signifie que l'application g est surjective.

On a l'application g est injective et surjective, ceci signifie d'après un théorème que l'application g est bijective.

$\begin{cases} g(x) = y \\ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g^{-1}(y) = \frac{9+y}{2y} \\ y \in \mathbb{R}^* \end{cases}$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g^{-1}(x) = \frac{9+x}{2x}$

Conclusion : $\begin{array}{l} g^{-1}:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\} \\ x \mapsto g^{-1}(x)=\frac{9+x}{2x} \end{array}$

2) Déterminons : $g^{-1}([-5;2])$:

On a : $g^{-1}(x)=\frac{9+x}{2x}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$

$g^{-1}([-5;2]-\{0\})=g^{-1}([-5;0[\cup]0;2])=g^{-1}([-5;0[)\cup g^{-1}(]0;2])$

$-5\leq x \prec 0 \Rightarrow \frac{9}{2}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\leq\frac{-2}{5}$

$0\prec x\leq 2\Rightarrow \frac{11}{4}\leq\frac{9}{2}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$

Ainsi : $g^{-1}([-5;2])=\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right]\cup\left[\frac{11}{4};+\infty\right[$

Exercice13 : Soit E un ensemble et $P(E)$ L'ensemble de ses parties, et soient A ; B des parties de E. Soit l'application f : $\begin{array}{l} P(E)\to P(E)\times P(E) \\ X\mapsto (X\cup A;X\cup B) \end{array}$

1)Montrer que f n'est pas surjective

2)Montrer que f est injective si et seulement si $A\cap B=\varnothing$

Solution : 1) On cherche un élément de $P(E)\times P(E)$ n'admettant pas d'antécédent dans $P(E)$ par f . Considérons alors le couple $(\varnothing;\varnothing)$.

$f(X)=(\varnothing;\varnothing)\Leftrightarrow$ X ∪ A = X ∪ B =∅ ;

Ceci est impossible, sauf si A = B = X =∅ ; ce qui est exclu. Ainsi, f n'est pas surjective.
Remarque Tout couple du type (A' ,B'), où A' est une partie de A, incluse strictement dans A et/ou B' est une partie de B, strictement incluse dans B, aurait fourni un contre-exemple.

2) On raisonne ici par double implication.

• ⇐ : Soient X ,X' ∈ E telles que f (X) = f (X').

Alors X ∪ A = X' ∪ A et X ∪ B = X' ∪ B (∗).

On en déduit : X = X ∪∅ = X ∪(A ∩ B) (par hypothèse)
= (X ∪ A)∩(X ∪ B)
= (X' ∪ A)∩(X' ∪ B) (d'après(∗))
= X' ∪(A ∩ B) = X' ∪∅ ; = X'

Dès lors, f est bien injective.

• ⇒ : D'une part, f (∅) = (∅∪ A; ∅∪ B) = (A;B).

D'autre part, f (A ∩ B) = ((A ∩ B)∪ A;(A ∩ B)∪ B) = (A;B).

f étant injective, on en déduit : A ∩ B = ∅;.

On a donc bien : f injective ⇔ A ∩ B =∅ ;

Exercice14 : Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.
Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que :

1)$f^{-1}(A'\cup B')=f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$

2) $f^{-1}(A'\cap B')=f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$

Solution :1) Pour tout $x\in f^{-1}(A'\cup B')$, $f(x)\in A'\cup B'$

Donc $f(x)\in A'$ ou $f(x)\in B'$,

Par conséquent $x\in f^{-1}(A')$ ou $x\in f^{-1}(B')$,

Autrement dit : $x\in f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$

On a montré que $f^{-1}(A'\cup B')\subset f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$

Pour tout $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$: $x \in f^{-1}(A')$ ou $x \in f^{-1}(B')$,
Par conséquent $f(x) \in A'$ ou $f(x) \in B'$,
Autrement dit $f(x) \in A' \cup B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cup B')$. On a montré que $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$ Finalement $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2) Pour tout $x \in f^{-1}(A' \cap B')$, $f(x) \in A' \cap B'$
Donc $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$,
Par conséquent $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$,
Autrement dit $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
On a montré que :
$f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ Pour tout $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$, $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$, autrement dit $f(x) \in A' \cap B'$
Donc :$x \in f^{-1}(A' \cap B')$.
On a montré que $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cap B')$
Finalement $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1} B')$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien