 DL1: D PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P : « $\left(\exists x \in \mathbb{R}^{*+}\right); x^2 \prec x \ ou \ x+\frac{1}{x} \prec 0$ »

2) Q : « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Q}) / x = y \ ou \ x \succ y$ »

3) R : « $(\exists y \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{R}) / x = y \ ou \ x \succ y$ »

Exercice2 : Soient : $x \in \mathbb{R}^+ \quad et \quad y \in \mathbb{R}^+$

Montrer que : $x+2y+13 = 6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow x = 7 \ et \ y = 0$.

Exercice3 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4} \leq 1$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 - x + 1 \succ 0$

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^4+3x^2+1} \geq x^2+1$

4) Montrer que : $\forall (a;b) \in ([0;+\infty[)^2$; $a+b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$

5) Montrer que : $\forall (a;b) \in (]0;+\infty[)^2$; $\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$

Exercice4 : Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

2) Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$: $x \neq y \Rightarrow x^3 + x \neq y^3 + y$

Exercice5 : 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{n+2}{n+3} \notin \mathbb{N}$

2)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

Exercice6 : On considère les ensembles suivants : $H = \left\{(n;m) \in \mathbb{Z}^2 / nm + 2 - 3n = 7\right\}$

$L = \left\{(n;m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* / \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{5}\right\}$

Écrire les ensembles H et L en extension

Exercice7 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E

Monter les assertions suivantes :

1) $A \subset B \Leftrightarrow A = A \cap B$

2) $A \cap B \subset \left(A \cap \overline{C}\right) \cup (B \cap C)$

Exercice8 : Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{2n+1}{4}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{5m+4}{3}/m\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $A\cap B=\varnothing$
2) Montrer que : $B\cap\mathbb{N}\neq\varnothing$

Exercice9 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x+\frac{1}{x} \end{array}$

1) Calculer : $f(1)$ et $f(2)$
2) Montrer que f est injective
3) Montrer que f est surjective
4) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f .

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ (n;m)\mapsto n\times m \end{array}$ et l'application g : $\begin{array}{l} \mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ n\mapsto\left(n;(n+1)^2\right) \end{array}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?
3) g est-elle injective ?
4) g est-elle surjective ?

Exercice11 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}.$$

Exercice12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I)\ \sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}\succ\frac{1}{2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien