http://www.xriadiat.com **DL1: D** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice5 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P : « $\left(\exists x\in\mathbb{R}^{*+}\right);x^2\prec x\ ou\ \ x+\frac{1}{x}\prec 0$ »

2) Q : « $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{Q}\right)/\ x=y\ \ ou\ x\succ y$ »

3) R : « $\left(\exists y\in\mathbb{Q}\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)/\ x=y\ \ ou\ x\succ y$ »

Solution : 1) P : « $\left(\exists x\in\mathbb{R}^{+}\right);x^2\prec x\ ou\ \ x+\frac{1}{x}\prec 0$ »

On a : "$\left(\exists x\in\mathbb{R}^{*+}\right);x^2\le x$" est vraie : il suffit de prendre : $x=\frac{1}{2}$ et on trouve : $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\prec\frac{1}{2}$ (vraie)

Donc : P : « $\left(\exists x\in\mathbb{R}^{*+}\right);x^2\le x\ ou\ \ x+\frac{1}{x}\prec 0$ » est une proposition vraie (car il Ya une disjonction :OU)

$\overline{P}$: « $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);x^2\ge x\ et\ \ x+\frac{1}{x}\ge 0$ »

2) Q : « $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{Q}\right)/\ x=y\ \ ou\ x\succ y$ »

Soit : $x\in\mathbb{R}$: on peut toujours trouver un nombre entiers relatif donc rationnel y inférieur ou égal a y

Il suffit de prendre : $E(x)\in\mathbb{Q}$

$\overline{Q}$: « $\left(\exists x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{Q}\right)/\ x\ne y\ \ et\ x\le y$ »

3) $\overline{R}$: « $\left(\forall y\in\mathbb{Q}\right)\left(\exists x\in\mathbb{R}\right)/\ x\ne y\ \ et\ x\le y$ »

Soit : $y\in\mathbb{Q}$ on prend : $x=y-1\in\mathbb{R}$: $x\ne y\ \ et\ x\le y$

Alors la proposition $\overline{R}$: est vraie et par suite : R Fausse

Exercice5 : Soient : $x\in\mathbb{R}^{+}\quad et\quad y\in\mathbb{R}^{+}$

Montrer que : $x+2y+13=6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow x=7\ et\ \ y=0$.

Solution : Soient : $x\in\mathbb{R}^{+}\quad et\quad y\in\mathbb{R}^{+}$: On va raisonner par équivalence successives

$$x+2y+13=6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow x+2y+13-6\sqrt{x+2}-2\sqrt{2y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x+11-6\sqrt{x+2}+2y-2\sqrt{2y+1}+2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2+2y+1-2\sqrt{2y+1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2+\sqrt{2y+1}^2-2\sqrt{2y+1}+1^2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2y+1}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-3=0\ \ et\ \ \sqrt{2y+1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=3\ \ et\ \ \sqrt{2y+1}=1\Leftrightarrow\sqrt{x+2}^2=9\ \ et\ \ \sqrt{2y+1}^2=1$$

$$\Leftrightarrow x+2=9\ \ et\ \ 2y+1=1\Leftrightarrow x=7\ \ et\ \ y=0$$

$$x+2y+13=6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow x=7\ et\ \ y=0$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad et \quad \forall y\in\mathbb{R}^+ \quad : x+2y+13=6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow x=7 \ et \ y=0$

Exercice9 : 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x^2-x+1\succ 0$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\sqrt{x^4+3x^2+1}\geq x^2+1$

4) Montrer que : $\forall (a;b)\in([0;+\infty[)^2$; $a+b\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$

5) Montrer que : $\forall (a;b)\in(]0;+\infty[)^2$; $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}$

Solution : 1) Methode1 : Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x\in\mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1\Leftrightarrow 4x\leq x^2+4\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0\Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0$

Donc : $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1\Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0$

Et puisque on a : $(x-2)^2\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1$

Methode2 : Un raisonnement direct :

Soit : $x\in\mathbb{R}$ $1-\frac{4x}{x^2+4}=\frac{x^2+4-4x}{x^2+4}=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}\geq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1$

2) Nous raisonnons par équivalence :

Soit : $x\in\mathbb{R}$ $x^2-x+1\succ 0\Leftrightarrow x^2-2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\succ 0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{4}{4}\succ 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\succ 0$

Et puisque on a : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\succ 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x^2-x+1\succ 0$

3) Soit : Nous raisonnons par équivalence

$x\in\mathbb{R}$ $\sqrt{x^4+3x^2+1}\geq x^2+1\Leftrightarrow x^4+3x^2+1\geq (x^2+1)^2$

$\Leftrightarrow x^4+3x^2+1\geq x^4+2x^2+1\Leftrightarrow x^2\geq 0$

Donc : $\sqrt{x^4+3x^2+1}\geq x^2+1\Leftrightarrow x^2\geq 0$

Et puisque on a : $x^2\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\sqrt{x^4+3x^2+1}\geq x^2+1$

4) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b)\in([0;+\infty[)^2$: On a : $a+b\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}\Leftrightarrow(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\geq 0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

Donc : $a+b\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

Et puisque on a : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$; $\forall (a;b)\in([0;+\infty[)^2$ (vraie)

Alors : $\forall (a;b)\in([0;+\infty[)^2$; $a+b\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$

5) Montrons que : $\forall(a;b)\in([0;+\infty[)^2$; $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}$

Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$:On a : $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2}{a+b}-\frac{3a-b}{4}\geq0$ $\Leftrightarrow\frac{4a^2-3a^2-3ab+ab+b^2}{4(a+b)}\geq0$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2-2ab+b^2}{4(a+b)}\geq0\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}\geq0$$

Donc : $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}\geq0$

Et puisque on a : $\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}\geq0$; est une proposition vraie $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$

Alors : $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$; $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}$

Exercice10 : Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$; $x^2+xy+y^2+1\succ0$

2) Déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$: $x\neq y\Longrightarrow x^3+x\neq y^3+y$

Solution : 1) soit $y\in\mathbb{R}$ (on le fixe)

L'équation : $x^2+xy+y^2+1\succ0$ devient une équation dont la variable est x

$\Delta=y^2-4\times1\times(y^2+1)=y^2-4y^2+-4=-3y^2-4=-(3y^2+4)\prec0$

Le signe de : x^2+xy+y^2+1 est celui de $a=1$

Donc : $x^2+xy+y^2+1\succ0$

Par suite : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$ $x^2+xy+y^2+1\succ0$

2) Déduction que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$: $x\neq y\Longrightarrow x^3+x\neq y^3+y$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

L'assertion : $x\neq y\Rightarrow x^3+x\neq y^3+y$ est équivalente à : $x^3+x=y^3+y\Longrightarrow x=y$

Montrer que : $x^3+x=y^3+y\Rightarrow x=y$

Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Supposons que : $x^3+x=y^3+y$

Donc : $x^3-y^3+x-y=0\Rightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0$

$\Longrightarrow x-y=0\ \ ou\ \ x^2+xy+y^2+1=0$

Comme : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$; $x^2+xy+y^2+1\succ0$ alors : $x^2+xy+y^2+1\neq0$

$\Rightarrow x-y=0\ \Rightarrow x=y$

Par contraposition ceci équivalent à : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$: $x\neq y\Rightarrow x^3+x\neq y^3+y$

Exercice23 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\frac{n+2}{n+3}\notin\mathbb{N}$

2)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Méthode1 : Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{n+2}{n+3}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{n+2}{n+3}=m\Rightarrow n+2=m(n+3)\Rightarrow n+3/n+2$

et comme : $n+3\succ n+2$

C'est une contradiction car si $n+3 / n+2$

Alors : $n+3 \le n+2$

Ceci signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\dfrac{n+2}{n+3} \notin \mathbb{N}$

Méthode2 : direct : On a : $n \in \mathbb{N}$ donc $n+1 \prec n+2$

Donc $0 \prec \dfrac{n+1}{n+2} \prec 1$

Donc : $\dfrac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{16n^2+8n+3} \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{16n^2+8n+3} = m$

$\sqrt{16n^2+8n+3} = m \Rightarrow 16n^2+8n+3 = m^2$

et comme : $16n^2+8n+3 = \left((4n)^2+2\times 4n+1\right)+2 = (4n+1)^2+2$

et comme : $(4n+1)^2 \prec (4n+1)^2+2$ alors : $(4n+1)^2 \prec m^2$

Calculons $(4n+2)^2$: $(4n+2)^2 = (4n)^2+2\times 4\times 2n+4 = 16n^2+16n+4$

Comparons : $(4n+2)^2$ et m^2 : $(4n+2)^2 - m^2 = 16n^2+16n+4-16n^2-8n-3 = 8n+1 \succ 0$

Alors : $(4n+1)^2 \prec m^2 \prec (4n+2)^2$

Alors : $4n+1 \prec m \prec 4n+2$ et $m \in \mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $4n+1$ et $4n+2$

Ceci signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$

Exercice1 : On considère les ensembles suivants : $H = \left\{(n;m) \in \mathbb{Z}^2 / nm+2-3n=7\right\}$

$L = \left\{(n;m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* / \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{5}\right\}$

Écrire les ensembles H et L en extension

Solution :1) Soit : $(n;m) \in \mathbb{Z}^2$

$(n;m) \in H \Leftrightarrow nm+2-3n=7 \Leftrightarrow n(m-3)=5 \Leftrightarrow \begin{cases} n=5 \\ m-3=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-5 \\ m-3=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=1 \\ m-3=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-1 \\ m-3=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n=5 \\ m=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-5 \\ m=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=1 \\ m=8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-1 \\ m=-2 \end{cases}$

Donc : $H = \left\{(4;5);(2;-5);(8;1);(-2;-1)\right\}$

1) Soit : $(n;m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$

$(n;m) \in L \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{n+m}{nm}=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 5n+5m=nm \Leftrightarrow 5n+5m-nm=0 \Leftrightarrow m(5-n)+5n=0$

$\Leftrightarrow -m(n-5)+5(n-5)+25=0 \Leftrightarrow m(n-5)-5(n-5)=25$

$\Leftrightarrow (n-5)(m-5)=25 \Leftrightarrow \begin{cases} n-5=5 \\ m-5=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=1 \\ m-5=25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=-1 \\ m-5=-25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=-25 \\ m-5=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=25 \\ m-5=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=-5 \\ m-5=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n=10 \\ m=10 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=6 \\ m=30 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=4 \\ m=-20 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-20 \\ m=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=30 \\ m=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=0 \\ m=0 \end{cases}$ $(n;m) \notin \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$

Donc : $L = \left\{(10;10);(6;30);(30;6);(4;-20);(4;-20)\right\}$

Exercice4 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E
Monter les assertions suivantes :
1) $A\subset B \Leftrightarrow A=A\cap B$
2) $A\cap B\subset\left(A\cap\overline{C}\right)\cup\left(B\cap C\right)$

Solution : 1) Montrons que : $A\subset B \Leftrightarrow A=A\cap B$
Cette proposition est une équivalence.
On raisonne donc par double implication.
• ⇒ : cette implication est immédiate (faites un dessin !).
• ⇐ : Soit x ∈ A. Puisque A = A ∩ B,
Donc : x ∈ A ∩ B.
Ainsi x ∈ A et x ∈ B.
En particulier, x ∈ B.
On a donc montré que, pour tout élément x de A, x ∈ B : ainsi, A ⊂ B.
Par double implication, on a bien l'équivalence demandée. 2) Il faut montrer ici une inclusion entre ensembles.
Le point de départ est habituel :Soit x ∈ A∩B donc : x ∈ A et x ∈ B.
On a alors une disjonction de cas :
• 1 er cas : x ∈ C .
On a x ∈ B et x ∈ C , donc x ∈ B ∩C .
Ainsi, x ∈ (A ∩$\overline{C}$)∪(B ∩C).
• 2ème cas : x $\notin C$. Alors x ∈ $\overline{C}$. Puisque x est aussi élément de A, x ∈ A ∩$\overline{C}$.
Ainsi, x ∈ (A ∩$\overline{C}$)∪(B ∩C). Finalement, dans tous les cas :
si x ∈ A ∩ B alors : x ∈ (A ∩$\overline{C}$)∪(B ∩C).
On a donc bien l'inclusion demandée.

Exercice10 : Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{2n+1}{4}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{5m+4}{3}/m\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $A\cap B=\varnothing$
2) Montrer que : $B\cap\mathbb{N}\neq\varnothing$

Solution : 1) On suppose par l'absurde que : $A\cap B\neq\varnothing$ Alors il existe : $x\in A\cap B$ tel que :
$\exists(n;m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que : $x=\frac{2n+1}{4}=\frac{5m+4}{3}$

Donc : $\frac{2n+1}{4}=\frac{5m+4}{3}$

Donc : $6n+3=20m+16 \Rightarrow 6n-20m=13 \Rightarrow 3n-10m=\frac{13}{2}\notin\mathbb{Z}$

Ce qui est absurde car : $3n-10m\in\mathbb{Z}$
Donc : $A\cap B=\varnothing$

2) On a : $3\in B$ en effet : $\frac{5m+4}{3}=3 \Leftrightarrow 5m+4=9 \Leftrightarrow 5m=5 \Leftrightarrow m=1\in\mathbb{Z}$

Donc : $3=\frac{5\times1+4}{3}$ et $1\in\mathbb{Z}$

On a donc : $3\in\mathbb{N}$ et $3\in B$ c'est-à-dire : $3\in B\cap\mathbb{N}$
Donc $B\cap\mathbb{N}\neq\varnothing$

Exercice12 : Soit l'application : $\begin{aligned}f:[1;+\infty[&\rightarrow[2;+\infty[\\ x&\mapsto x+\frac{1}{x}\end{aligned}$

1) Calculer : $f(1)$ et $f(2)$
2) Montrer que f est injective
3) Montrer que f est surjective

4) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f .

Solution : 1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

$f(1)=1+\frac{1}{1}=2$ et $f(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2) Soient $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\frac{1}{x_1}=x_2+\frac{1}{x_2}$

$\Rightarrow \frac{x_1^2+1}{x_1}=\frac{x_2^2+1}{x_2}\Rightarrow x_2\left(x_1^2+1\right)=x_1\left(x_2^2+1\right)$

$\Rightarrow x_2x_1^2+x_2=x_1x_2^2+x_1\Rightarrow x_2x_1^2-x_1x_2^2+x_2-x_1=0$

$\Rightarrow x_2x_1\left(x_1-x_2\right)-\left(x_1-x_2\right)=0\Rightarrow\left(x_1-x_2\right)\left(x_2x_1-1\right)=0$

$\Rightarrow x_1-x_2=0\ ou\ \ x_2x_1-1=0\Rightarrow x_1=x_2\ ou\ \ x_2x_1=1\Rightarrow x_1=x_2\ ou\ \ x_1=\frac{1}{x_2}$

$si:\ x_1=\frac{1}{x_2}$ Comme : $x_2\in[1;+\infty[\ \Rightarrow\ x_1=\frac{1}{x_2}\le 1$

Et puisque : $x_1\ge 1$ Alors : $x_1=1$

Et par suite $x_2=1$ et donc : $x_1=x_2$

Dans tous les cas : $x_1=x_2$

Donc f est injective

3) Montrons que f est surjective

Soit $y\in[2;+\infty[$

Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$f(x)=y\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=y\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}=y\Leftrightarrow x^2-xy+1=0$

$\Delta=y^2-4\ge 0$ car $y\ge 2$

Donc : au moins 2 solutions : $x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ $et\ \ x=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

Puisque l'équation $f(x)=y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$ ($\forall y\in\mathbb{R}$)

C'est-à-dire : $\forall y\in[2;+\infty[;\ \exists x\in\mathbb{R}/\ f(x)=y$

Conclusion : f est surjective

4) Puisque f est injective et surjective alors f est bijective

Soit $y\in[2;+\infty[$; $f(x)=y\Leftrightarrow x^2-xy+1=0$

$x_1=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ $et\ \ x_2=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

On a : $x_2-1=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}-1=\frac{y-2-\sqrt{y^2-4}}{2}=\frac{y-2-\sqrt{(y-2)(y+2)}}{2}$

Comme : $y-2\le y+2\qquad\otimes y-2$

Alors : $(y-2)(y-2)\le(y+2)(y-2)$

Alors : $(y-2)^2\le(y+2)(y-2)$

Alors : $\sqrt{(y-2)^2} \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$

Alors : $|y-2| \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$

Alors : $y-2 \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$ car $y \in [2;+\infty[$

Et donc : $x_2 - 1 \leq 0$ donc : $x_2 = \dfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \notin y \in [1;+\infty[$

Alors : $x = \dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$

Donc : $\begin{array}{l} f^{-1} : [2;+\infty[\to [1;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \end{array}$

Exercice14 : Soit l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (n;m) \mapsto n\times m \end{array}$ et l'application $g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ n \mapsto \left(n;(n+1)^2\right) \end{array}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?
3) g est-elle injective ?
4) g est-elle surjective ?

Solution : 1)

- f est injective ssi tout élément de $\mathbb{N}$ admet au plus un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall (n;m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\forall (n';m') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m) = f(n';m') \Rightarrow (n;m) = (n';m')$

- f n'est pas injective si et seulement si il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui admet plus d'un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ C'est-à-dire : $\exists (n;m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists (n';m') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m) = f(n';m')$ et $(n;m) \neq (n';m')$

Si je trouve : $(n;m) \neq (n';m')$ et $f(n;m) = f(n';m')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Si je prends : $(1;2)$ et $(2;1)$

On a : $f(1;2) = 1\times 2 = 2$ et $f(2;1) = 2\times 1 = 2$

Donc : : $\exists (1;2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists (2;1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(1;2) = f(2;1)$ Mais $(1;2) \neq (1;2)$

Donc : f n'est pas injective

2) f est surjective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall p \in \mathbb{N}$; $\exists (n;m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $f(n;m) = p$

Soit : $p \in \mathbb{N}$

$f(n;m) = p \Leftrightarrow n\times m = p$

Il suffit de prendre : $n = p$ et $m = 1$ car : $p\times 1 = p$

C'est-à-dire : $\forall p \in \mathbb{N}$; $\exists (p;1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$; Tel que : $f(p;1) = p$

Donc : f est surjective.

3) $g: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ n \mapsto \left(n;(n+1)^2\right) \end{array}$

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

$g(n)=g(m) \Rightarrow \left(n;(n+1)^2\right)=\left(m;(m+1)^2\right)$

$\Rightarrow n=m \ \ et \ \ (n+1)^2=(m+1)^2 \Rightarrow n^2-m^2-2(n-m)=0$

$\Rightarrow n=m \ \ et \ \ n+1=m+1 \Rightarrow n=m \ \ et \ \ n=m \Rightarrow n=m$

Donc : g est injective

4)

- g n'est pas surjective ssi il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists(p;q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\forall n\in\mathbb{N}$; $g(n)\neq(p;q)$

- Si je trouve : $(p;q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$ on peut affirmer que g n'est pas surjective.

Si je prends : $(1;1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Supposons que : $(1;1)$ a un antécédent dans $\mathbb{N}$

On a : $g(n)=(1;1) \Leftrightarrow \left(n;(n+1)^2\right)=(1;1) \quad \Leftrightarrow n=1 \ \ et \ \ (n+1)^2=1 \Leftrightarrow n=1 \ \ et \ \ n+1=1$

$\Leftrightarrow n=1 \ \ et \ \ n=0$ absurde

Donc : g n'est pas surjective.

Remarque : il existe des éléments de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui ont des antécédents dans $\mathbb{N}$

Par exemple : $(1;4)$ Il existe : $1\in\mathbb{N}$ tel que : $g(n)=(1;4)$ Car : $\left(1;(1+1)^2\right)=(1;4)$

C'est-à-dire : $(1;4)$ a au moins un antécédent dans $\mathbb{N}$ (pas suffisant pour affirmer que g est surjective car il faut que tous les éléments de l'ensemble d'arrivé aient des antécédents par g.)

Exercice14 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}.$$

Solution : Notons P(n) la proposition : " $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{1-1}1^2=1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2}(-1)^{1+1}=1\times(-1)^2=1$$

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$??

Remarque : $(-1)^{n+2}=(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n\times1=(-1)^n$ et

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2+(-1)^n(n+1)^2=S_n+(-1)^n(n+1)^2$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

Donc : $S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1} + (-1)^n (n+1)^2 = \frac{1}{2}\left(-n(n+1)(-1)^n + 2(-1)^n (n+1)^2\right)$

Car : $(-1)^{n+1} = (-1)^n \times (-1)^1 = -(-1)^n$

Donc : $S_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(-1)^n\left(-n+2(n+1)\right) = \frac{1}{2}(-1)^n (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Exercice19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I)\ \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} \succ \frac{1}{2}$

Solution : On va Opérer par disjonction de cas :
On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation :
$D = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0 \ \ et \ \ 3-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1 \ \ et \ \ x \leq 3\} = [-1;3]$

Soit $x \in [-1;3]$ et S l'ensemble des solutions de (I)

1 cas : si $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} \leq 0 \ \Leftrightarrow \sqrt{3-x} \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3-x \leq x+1$
$\Leftrightarrow 2 \leq 2x \Leftrightarrow x \geq 1$ et $x \in [-1;3] \Leftrightarrow x \in [1;3]$

Donc : l'Inéquation n'admet pas de solution c'est-à-dire : $S_1 = \varnothing$

2 cas : si alors $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} \succ 0$

$x \in S_2 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} \succ \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}\right)^2 \succ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3-x+x+1-2\sqrt{(x+1)(3-x)} \succ \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{(x+1)(3-x)} \succ \frac{1}{4} \Leftrightarrow 16-8\sqrt{(x+1)(3-x)} \succ 1 \Leftrightarrow -8\sqrt{(x+1)(3-x)} \succ -15$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} \prec \frac{15}{8} \Leftrightarrow -x^2+2x+3 \prec \frac{225}{64} \Leftrightarrow x^2-2x-3 \succ \frac{225}{64} \Leftrightarrow x^2-2x+1-4 \succ \frac{225}{64}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \succ \frac{31}{64} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} \succ \sqrt{\frac{31}{64}} \Leftrightarrow |x-1| \succ \frac{\sqrt{31}}{8}$ Mais : $x \in [-1;1[$ donc : $x-1 \prec 0$

$\Leftrightarrow -x-1 \succ \frac{\sqrt{31}}{8} \Leftrightarrow -x \succ \frac{\sqrt{31}}{8} - 1 \Leftrightarrow x \prec 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$; On peut vérifier que : $-1 \prec 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} \prec 1$

$x \in S_2 \Leftrightarrow x \in \left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[$; Donc $S_2 = \left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[$

Donc : $S = \varnothing \cup \left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[= \left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien