http://www.xriadiat.com **DL1: C** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : On considère la suivante : $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):2x^2+xy+y^2=0$

1) Ecrire la négation de P

2) Déterminer la valeur de vérité de P

Exercice2 : Soient : $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}^*$; $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}^*$

1) Montrer que : $ax+by=1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2}\le a^2+b^2$

2) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2\right):a^2=b+1\Rightarrow\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

3) Soient : $a\,;b\;et\,c$ des réels.

a) Vérifier que : $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

b) Montrer que : $|ab|\succ\dfrac{c^2}{2}\Rightarrow|a-b|\succ c\;\;ou\;|a+b|\succ c$

4) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2\right):y\ne\dfrac{-3}{4}x\Rightarrow\dfrac{x-y}{x+y}\ne7$

5) n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair. Montrer que : $\dfrac{n}{m}\notin\mathbb{N}$

Exercice3 : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

1) Si n est non divisible par 3 alors n^2-1 est divisible par 3

2) Déduire que : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^2$; $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

Exercice4 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

1) Montrer que : $x\ne y\Rightarrow(x+1)(y-1)\ne(x-1)(y+1)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$;
n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Montrer que : $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

4) Montrer que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$;

5) Montrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

Exercice5 : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ On pose : $U_n=(n+1)(n+2)(n+3)\times\ldots\times(n+n)$ **et** $V_n=2^n\times1\times3\times5\times7\times\ldots\times(2n-1)$

Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $U_n=V_n$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{|x-3|}\le x-1$

Exercice7 : Démontrer que l'équation $9n^5-12n^4+6n-5=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice8 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.
1) Montre à l'aide de contres exemples que les implications suivantes ne sont pas toujours vraies
a) $A\cup B\subset A\cup C\Rightarrow B\subset C$
b) $A\cap B\subset A\cap C\Rightarrow B\subset C$
2) Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .
Monter que : $\begin{cases} A\cup B\subset A\cup C \\ A\cap B\subset A\cap C \end{cases}\Rightarrow B\subset C$
3) Monter que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$
Exercice9 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E
Montrer que : $\begin{cases} A\times B=A\times C \\ A\neq\varnothing \end{cases}\Rightarrow B=C$

Exercice10 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; On pose : $\forall k\in\{0;1;2;....;n-1\}=E$; $I_k=\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$

1) Montrer que : $\forall k\in E\;\; I_k\subset[0;1[$
2) Montrer que : $\forall(k;k')\in E^2$; $k\neq k'\Rightarrow I_k\cap I_{k'}=\varnothing$
Exercice11 : Soient les applications :
$f:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$, $x\mapsto 1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ et $g:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$, $x\mapsto\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$
1) Déterminer : $f([2;4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$
2) Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque
3)a) Vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[:g(x)=(f(x))^2$
3)b) En déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice12 : Soit l'application f : $]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to[4;+\infty[$, $(x;y)\mapsto(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

1) Montrer que f est surjective
2) f est-elle injective ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien