http://www.xriadiat.com **DL1: C** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : On considère la suivante : $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):2x^2+xy+y^2=0$

1) Ecrire la négation de P

2) Déterminer la valeur de vérité de P

Solution :1) $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):2x^2+xy+y^2\neq 0$

2) Déterminons la valeur de vérité de P

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):2x^2+xy+y^2\neq 0$

$2x^2+xy+y^2=y^2+xy+2x^2=ay^2+by+c$

On a : $\Delta=x^2-8x^2=-7x^2$

Si $\Delta\prec 0$ alors ; $2x^2+xy+y^2\succ 0$ donc : $2x^2+xy+y^2\neq 0$

En posant : $x=1$ on aura : $\Delta=-7\prec 0$

Donc : $(\exists x=1\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):2+y+y^2\neq 0$

Donc La proposition $\overline{P}$: est vraie donc P est fausse

Exercice2 : Soient : $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}^*$; $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}^*$

1) Montrer que : $ax+by=1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2}\leq a^2+b^2$

2) Montrer que : $\left(\forall (a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2\right):a^2=b+1\Rightarrow \dfrac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

3) Soients : $a\,;b\ et\,c$ des réels.

a) Vérifier que : $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

b) Montrer que : $|ab|\succ\dfrac{c^2}{2}\Rightarrow |a-b|\succ c\ \ ou\ |a+b|\succ c$

4) Montrer que : $\left(\forall (x;y)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2\right):y\neq\dfrac{-3}{4}x\Rightarrow\dfrac{x-y}{x+y}\neq 7$

5) n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair. Montrer que : $\dfrac{n}{m}\notin\mathbb{N}$

Solution : Soient : : $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}^*$; $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}^*$

1) Montrons que : $ax+by=1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2}\leq a^2+b^2$

$$\frac{1}{x^2+y^2}-(a^2+b^2)=\frac{1-(x^2+y^2)(a^2+b^2)}{x^2+y^2}=\frac{1-(a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2)}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1-(a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2)}{x^2+y^2}=\frac{1-((ax+by)^2-2axby+a^2y^2+b^2x^2)}{x^2+y^2}=\frac{1-(1-2axby+a^2y^2+b^2x^2)}{x^2+y^2}=\frac{1-1+2axby-a^2y^2-b^2x^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{-(a^2y^2-2axby+b^2x^2)}{x^2+y^2}=\frac{-(ay-bx)^2}{x^2+y^2}$$

Donc : $\frac{1}{x^2+y^2}-\left(a^2+b^2\right)\leq 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x^2+y^2}\leq a^2+b^2$: d'où : $ax+by=1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2}\leq a^2+b^2$

2) Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$: Montrons que : $a^2=b+1\Rightarrow \frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

$a^2=b+1\Rightarrow a^2-b=1\Rightarrow\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)=1\Rightarrow\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}}=1\Rightarrow 2\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}}=2$

$\Rightarrow 2a+2\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}}-2a=2\Rightarrow a+\sqrt{b}+2\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}}+\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{2(a+1)}\right)^2$

$\Rightarrow\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{2(a+1)}\right)^2\Rightarrow\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{2(a+1)}\Rightarrow\frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

Donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2\right):a^2=b+1\Rightarrow\frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

3) Soient : $a\,;b\ et\,c$ des réels.

a) Vérifions que : $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$:

Soit : $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: $(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2=4ab$

b) Montrons que : $|ab|\succ\frac{c^2}{2}\Rightarrow|a-b|\succ c\ \ ou\ |a+b|\succ c$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Il suffit de montrer que : $|a-b|\leq c\ \ et\ |a+b|\leq c\Rightarrow|ab|\leq\frac{c^2}{2}$

On suppose que : $|a-b|\leq c\ \ et\ |a+b|\leq c$ et on montre que $|ab|\leq\frac{c^2}{2}$??

On a : $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ donc :

$|4ab|=\left|(a+b)^2-(a-b)^2\right|\leq\left|(a+b)^2\right|+\left|(a-b)^2\right|$

Et comme : $|a+b|^2\leq c^2$ et $|a-b|^2\leq c^2$ alors $|4ab|\leq 2c^2$ Par suite : $|ab|\leq\frac{c^2}{2}$

Par contraposition ceci équivalent à : $|ab|\succ\frac{c^2}{2}\Rightarrow|a-b|\succ c\ \ ou\ |a+b|\succ c$

4) Utilisons un Raisonnement par contraposition : Soit : $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$

L'assertion : $y\neq\frac{-3}{4}x\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}\neq 7$ est équivalente à : $\frac{x-y}{x+y}=7\Rightarrow y=\frac{-3}{4}x$

On a : $\frac{x-y}{x+y}=7\Rightarrow x-y=7(x+y)\Rightarrow -y-7y=-x+7x\Rightarrow -8y=6x\Rightarrow y=-\frac{6}{8}x\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x$

Par contraposition ceci équivalent à : $y\neq\frac{-3}{4}x\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}\neq 7$

5) Soients : n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $\frac{n}{m}\in\mathbb{N}$ c'est-à-dire : $\exists p\in\mathbb{N}/\frac{n}{m}=p$ alors : $n=m\times p$

Ce qui est contradictoire puisque n est impair et $m\times p$ est pair.

Donc : $\frac{n}{m}\notin\mathbb{N}$

Exercice3 : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

1) Si n est non divisible par 3 alors n^2-1 est divisible par 3

2) Déduire que : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^2$; $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

Solution :1) Soit $n\in\mathbb{N}$ avec n non divisible par 3
Il y'a deux façons d'écrire n : $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k\in\mathbb{N}$
Pour cela on va utiliser un raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n=3k+1$: $n^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=9k^2+6k=3\left(3k^2+2k\right)=3k'$ avec :
$k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2-1 est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n=3k+2$
$n^2-1=(3k+2)^2-1=9k^2+12k+4-1=9k^2+12k+3=3\left(3k^2+4k+1\right)=3k'$

Avec : $k'=3k^2+4k+1\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : n^2-1 est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas le nombre n^2-1 est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que n est non divisible par 3

2) Soit $(a;b)\in\mathbb{N}^2$: $ab\left(a^2-b^2\right)=ab\left(a^2-1+1-b^2\right)=ab\left(\left(a^2-1\right)-\left(b^2-1\right)\right)$

1ére cas : si a est divisible par 3 ou b est divisible par 3
Alors : ab est divisible par 3 et par suite : $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

2ére cas : a n'est pas divisible par 3 ou b n'est pas divisible par 3

D'après 1) : a^2-1 est divisible par 3 et b^2-1 est divisible par 3

$(\exists k\in\mathbb{N});(\exists k'\in\mathbb{N})$ tels que : $a^2-1=3k$ et $b^2-1=3k'$

$ab\left(\left(a^2-1\right)-\left(b^2-1\right)\right)=ab(3k-3k')=3ab(k-k')=3k''$ Avec : $k'=ab(k-k')\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^2$; $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

Exercice4: $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

1) Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$;
n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Montrer que : $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

4) Montrer que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$;

5) Montrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

Solution :1) Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow xy-x+y-1=xy+x-y-1$
$\Rightarrow -2x=-2y\Rightarrow x=y$

Alors : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$

Donc : par contraposition : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$;
n^2 Est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3
Soit : $n\in\mathbb{N}$

Par contraposée montrons que :

n n'est pas un multiple de 3 $\Rightarrow$ n^2 n'est pas un multiple de 3 :

On suppose que n n'est pas un multiple de 3.

On a 2 cas possibles seulement pour n :

$n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

1ére cas : $n=3k+1$ alors $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\times(3k^2+2k)+1=3k'+1$

Avec : $k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2 n'est pas un multiple de 3 :

2ére cas : $n=3k+2$ alors $n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3\times(3k^2+4k+1)+1=3k'+1$

Avec : $k'=3k^2+4k+1\in\mathbb{N}$

Donc : n^2 n'est pas un multiple de 3

On conclut que dans les deux cas n^2 n'est pas un multiple de 3: Ceci signifie que :

n n'est pas un multiple de 3 $\Rightarrow$ n^2 n'est pas un multiple de 3 :

D'où par contraposée

n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$

Donc : il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ En Elevant légalité au carré nous obtenons : $a=b\sqrt{3}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{3}\right)^2$

$\Rightarrow a^2=3b^2\Rightarrow$ 3 divise a^2 $\Rightarrow$(D'après ce qui précède) $a=3k$ ① avec $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $a^2=3b^2\Rightarrow 9k^2=3b^2\Rightarrow 3k^2=b^2\Rightarrow b^2$ est un multiple de 3 $\Rightarrow$ b est un multiple de 3②

(D'après ce qui précède)

Donc on a : 3 divise a et b Cad : $a\wedge b\neq 1$

Nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse : $a\wedge b=1$.

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

4) Montrons que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$;

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$

Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que : $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$\sqrt{6}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b\sqrt{6}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{6}\right)^2\Rightarrow a^2=6b^2\Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair $\Rightarrow$ $a=2k$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $a^2=6b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$

5) Montrons que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\in\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow 5+2\sqrt{6}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2\sqrt{6}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$$

Nous obtenons une contradiction car $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$

Donc notre supposition est fausse donc : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Exercice5 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ On pose : $U_n = (n+1)(n+2)(n+3)\times\ldots\times(n+n)$

et $V_n = 2^n \times 1\times 3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n-1)$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = V_n$

Solution :1) a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = V_n$

1étapes : l'initialisation : Pour n =1 nous avons : $U_1 = 1+1 = 2$ et $V_1 = 2^1 \times 1 = 2$

C'est-à-dire : $U_1 = V_1$

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $U_n = V_n$

Montrons alors que : $U_{n+1} = V_{n+1}$ c'est-à-dire montrons :

$$((n+1)+1)((n+1)+2)((n+1)+3)\times\ldots\times((n+1)+n)\times((n+1)+n+1) = 2^{n+1}\times 1\times 3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n-1)\times(2n)\times(2n+1)$$

$$U_{n+1} = (n+2)(n+3)(n+4)\times\ldots\times(2n)\times(2n+1)\times(2n+2)$$

$$U_{n+1} = 2U_n \times (2n+1) = 2V_n \times (2n+1)$$

$$U_{n+1} = 2\times 2^n \times 1\times 3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n-1)\times(2n+1)$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = V_n$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{|x-3|} \le x-1$

Solution : On va Opérer par disjonction de cas :

On remarque tout d'abord que sur :] −∞ ; 1[, x − 1 < 0 donc il n'y a pas de solution sur cet intervalle puisque : $\sqrt{|x-3|} \le x-1$

On cherche donc uniquement des solutions sur l'intervalle [1 ; +∞[.

Sur cet intervalle, les deux membres sont positifs, et donc on peut utiliser la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{|x-3|} \le x-1 \Leftrightarrow |x-3| \le (x-1)^2 \Leftrightarrow |x-3| \le x^2-2x+1$

Comme $x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$ on est naturellement amené à résoudre sur deux intervalles différents pour faire Disparaître la valeur absolue :

• Sur [1 ; 3[: $|x-3| \le x^2-2x+1$ Equivaut à : $-(x-3) \le x^2-2x+1$

Equivaut à : $-x+3 \le x^2-2x+1$

Equivaut à : $0 \le x^2-2x-2$

On calcule le discriminant du polynôme x^2-2x-2 : Δ = 9 > 0 donc x^2-2x-2 admet deux racines Distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or, on a restreint l'étude à l'intervalle [1 ; 3[, donc on ne retient que les x ∈ [2 ; 3[.

• Sur [3 ; +∞ [: $|x-3| \le x^2-2x+1$ Equivaut à : $x-3 \le x^2-2x+1$

Equivaut à : $0 \le x^2-3x+4$

On calcule le discriminant du polynôme x^2-3x+4 : Δ = −7 < 0.

Donc ; le signe de x^2-3x+4 est du signe de $a=1$

Donc : $x^2-3x+4 > 0$

Donc, tous les x ∈ [3 ; +∞ [sont solutions de l'inéquation étudiée sur l'intervalle [3 ; +∞ [.
Au final, S = [2 ; 3[∪ [3 ; +∞ [= [2 ; +∞ [.
Exercice7 : Démontrer que l'équation $9n^5-12n^4+6n-5=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
Solution : Par l'absurde, supposons que : tel que
Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons $\exists n\in\mathbb{Z}$ tel que : $9n^5-12n^4+6n-5=0$
ce que l'on réécrit en : $n\left(9n^4-12n^3+6\right)=5$
Ainsi, n est un diviseur de 5. Or, les seuls diviseurs de 5 sont :-5 ;-1 ;1 ; 5
et on vérifie aisément par un calcul direct qu'aucun de ces nombres n'est solution de l'équation.
Ainsi, l'hypothèse formulée était fausse, et l'équation n'admet pas de solutions entières
Exercice8 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.
1) Montre à l'aide de contres exemples que les implications suivantes ne sont pas toujours vraies
a) $A\cup B\subset A\cup C\Rightarrow B\subset C$
b) $A\cap B\subset A\cap C\Rightarrow B\subset C$
2) Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .
Monter que : $\begin{cases}A\cup B\subset A\cup C\\ A\cap B\subset A\cap C\end{cases}\Rightarrow B\subset C$
3) Monter que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$
Solution : 1)a) $A=\{1;2;3\}$ et $B=\{1\}$ et $C=\{3;5\}$
$A\cup B=\{x\,/\,x\in A\ \ ou\ \ x\in B\}=\{1;2;3\}$
$A\cup C=\{x\,/\,x\in A\ \ ou\ \ x\in C\}=\{1;2;3;5\}$
On a : $A\cup B\subset A\cup C$ mais $B\not\subset C$
b) $A=\{1;2;3\}$ et $B=\{3;4;5\}$ et $C=\{3;4;6\}$
$A\cap B=\{x\,/\,x\in A\ \ et\, x\in B\}=\{3\}$
$A\cap C=\{x\,/\,x\in A\ \ et\, x\in C\}=\{3\}$
On a : $A\cap B\subset A\cap C$ mais $B\not\subset C$
2)On suppose que : $\begin{cases}A\cup B\subset A\cup C\\ A\cap B\subset A\cap C\end{cases}$ Montrons que : $\left(\forall x\in E\right)\left(x\in B\Rightarrow x\in C\right)$?
$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cup C\Rightarrow x\in A$ ou $x\in C$
- Si $x\in A$ alors $x\in A\cap B$ donc $x\in A\cap C$ car $A\cap B\subset A\cap C$ donc $B\subset C$
- Si $x\notin A$ et puisque $x\in C$ ou $x\in A$ est vraie alors $B\subset C$

Conclusion : $\left(\forall x\in E\right)\left(x\in B\Rightarrow x\in C\right)$
Donc : $B\subset C$
3) Montrons que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$
$\Rightarrow)$ On suppose que : $A\cap B=A\cap C$ Montrons que : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$
$\subset)$ Montrons que : $A\cap\overline{B}\subset A\cap\overline{C}$
✓ Soit $x\in A\cap\overline{B}$ montrons que $x\in A\cap\overline{C}$?
$x\in A\cap\overline{B}\ \Rightarrow x\notin B\ \ et\ x\in A\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A\cap C$
$\Rightarrow x\notin C$ car : $x\in A$
C'est-à-dire : $x\in A\cap\overline{C}$
$\supset)$ De même on Montre que : $A\cap\overline{C}\subset A\cap\overline{B}$
Donc : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$
Par suite : $A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$
$\Leftarrow)$ On suppose que : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Montrons que : $A\cap B=A\cap C$

- ✓ Soit $x\in A\cap B$ montrons que $x\in A\cap C$?

$x\in A\cap B \Rightarrow x\in A \text{ et } x\in B \Rightarrow x\in A \text{ et } x\notin \overline{B} \Rightarrow x\notin A\cap\overline{B} \Rightarrow x\notin A\cap\overline{C}$

$\Rightarrow x\notin \overline{C}$ car : $x\in A$

$\Rightarrow x\in C$ et $x\in A$

$\Rightarrow x\in A\cap C$

Donc : $A\cap B\subset A\cap C$

- ✓ De même on Montre que : $A\cap C\subset A\cap B$

Par suite : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow A\cap B=A\cap C$

Conclusion : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Exercice9 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E

Montrer que : $\begin{cases} A\times B=A\times C \\ A\neq\varnothing \end{cases} \Rightarrow B=C$

Solution : a) Montrons que : $B\subset C$?

Soit un élément $y\in B$ et puisque : $A\neq\varnothing$

Alors $\exists x\in A$

Et donc : $\exists(x;y)\in A\times B$

Donc : $(x;y)\in A\times C$

Donc : $x\in A$ et $y\in C$

Donc : $y\in B\Rightarrow y\in C$

Donc : $B\subset C$

a) Montrons que : $C\subset B$? (La même démarche)

Car C *et* B jouent des rôles symétriques

Conclusion : $\begin{cases} A\times B=A\times C \\ A\neq\varnothing \end{cases} \Rightarrow B=C$

Exercice10 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; On pose : $\forall k\in\{0;1;2;....;n-1\}=E$; $I_k=\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$

1) Montrer que : $\forall k\in E\ \ I_k\subset[0;1[$

2) Montrer que : $\forall(k;k')\in E^2$; $k\neq k' \Rightarrow I_k\cap I_{k'}=\varnothing$

Solution : 1) Montrons : $\forall k\in E\ \ I_k\subset[0;1[$

Soit : $k\in E$ et $x\in I_k$ Montrons que : $x\in[0;1[$???

On a : $x\in I_k$ donc : $x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$

Donc : $\frac{k}{n}\leq x\prec\frac{k+1}{n}$ or : $0\leq k\leq n-1$

Donc : $1\leq k+1\leq n\Rightarrow\frac{1}{n}\leq\frac{k+1}{n}\leq 1$

Donc : $0\leq\frac{k}{n}\leq x\prec\frac{k+1}{n}\leq 1\Rightarrow 0\leq x\prec 1\Rightarrow x\in[0;1[$

Donc : $\forall k\in E\ \ I_k\subset[0;1[$

2) Montrons que : $\forall(k;k')\in E^2$

$k \neq k' \Rightarrow I_k \cap I_{k'} = \varnothing$

Supposons que : $k \neq k'$ et $I_k \cap I_{k'} \neq \varnothing$

$k \neq k'$ et $I_k \cap I_{k'} \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in I_k \cap I_{k'}$ $avec : k \neq k'$

Donc : $x \in I_k$ et $x \in I_{k'}$ $avec : k \neq k'$

Supposons que par exemple que : $k \prec k'$

$k \prec k' \Rightarrow k+1 \leq k' \Rightarrow \frac{k+1}{n} \leq \frac{k'}{n}$ ©

$x \in I_k \Rightarrow \frac{k}{n} \leq x \prec \frac{k+1}{n}$ ①

$x \in I_{k'} \Rightarrow \frac{k'}{n} \leq x \prec \frac{k'+1}{n}$ ②

① et ② et © $\Rightarrow \frac{k}{n} \leq x \prec \frac{k+1}{n} \leq \frac{k'}{n} \leq x \Rightarrow x \prec x$

Absurde : Donc : $\forall (k;k') \in E^2$; $k \neq k' \Rightarrow I_k \cap I_{k'} = \varnothing$

Exercice11 : Soient les applications :

$f :]1;+\infty[\to]1;+\infty[$, $x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ et $g :]1;+\infty[\to]1;+\infty[$, $x \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$

1) Déterminer : $f([2;4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2) Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a) Vérifier que : $\forall x \in]1;+\infty[: g(x) = (f(x))^2$

3)b) En déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $x \in [2;4[\Leftrightarrow 2 \leq x \prec 4 \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \leq \sqrt{x}-1 \prec 1 \Leftrightarrow 1 \prec \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\Leftrightarrow 3 \prec f(x) \leq 3+2\sqrt{2}$

Donc : $f([2;4[) =]3;3+2\sqrt{2}]$

$g^{-1}(\{9\}) = \{x \in]1;+\infty[/ g(x) \in \{9\}\} = \{x \in]1;+\infty[/ g(x) = 9\}$

$g^{-1}(\{9\}) = \{x \succ 1 / \sqrt{x} = 2\} = \{x \succ 1 / x = 4\} = \{4\}$

2)Montrons que f est injective ?

Soient $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \frac{2}{\sqrt{x_1}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x_2}-1}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1}-1 = \sqrt{x_2}-1 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc f est injective

Montrons que f est surjective ?

Soit $y \in]1;+\infty[$; $y = f(x) \Leftrightarrow y = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$

$\Leftrightarrow y-1=\dfrac{2}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=\dfrac{2}{y-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{2}{y-1}+1=\dfrac{2+y-1}{y-1}=\dfrac{y+1}{y-1}$

$y=f(x)\Leftrightarrow x=\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2$ et on a : $\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2-1=\left(\dfrac{y+1}{y-1}-1\right)\left(\dfrac{y+1}{y-1}+1\right)=\dfrac{4y}{(y-1)^2}\succ 0$

Donc : $\forall y\in]1;+\infty[\ \left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2\succ 1$

Donc : $(\forall y\in]1;+\infty[)(\exists x\in]1;+\infty[)\,/\ x=\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2$ et $y=f(x)$

Donc : que f est surjective de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

Détermination de sa bijection réciproque ?

$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=y \\ y\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

Donc : $\begin{array}{l} f^{-1}:]1;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x\mapsto \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 \end{array}$

3)a) Vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[: (f(x))^2=\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)^2=g(x)$

3)b) On a : $g=h\circ f$ avec $h(x)=x^2\ \forall x\in]1;+\infty[$:

Et puisque les applications f et h sont des bijections de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ alors $g=h\circ f$ est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et on a : $g^{-1}(x)=(h\circ f)^{-1}(x)=f^{-1}\circ h^{-1}(x)=f^{-1}(h^{-1}(x))=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2=g(x)$

Exercice12 : Soit l'application $f:\ \begin{array}{l}]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to [4;+\infty[\\ (x;y)\mapsto (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \end{array}$

1) Montrer que f est surjective
2) f est-elle injective ?

Solution : 1) 2) Soit : $z\in [4;+\infty[$; $\exists?(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

Tel que : $f(x;y)=z$??

$f(x;y)=z\Leftrightarrow (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=z$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1=z \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=z-2$

On pose : $\dfrac{x}{y}=t \Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}=z-2 \Leftrightarrow t^2-(z-2)t+1=0$

$\Delta=(z-2)^2-4=z^2-4z$

Comme : $45\leq z$ alors : $z-2\geq 2\Rightarrow (z-2)^2\geq 4$

Donc : $\Delta=(z-2)^2-4\geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$t=\frac{(z-2)+\sqrt{(z-2)^2-4}}{2}\succ 0$ ou $t=\frac{(z-2)-\sqrt{(z-2)^2-4}}{2}$

Donc : $\exists(x;y)\in\left]0;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[$ tel que : $f(x;y)=z$

Donc : f est surjective

2) f est-elle injective ?

Si je trouve : $(x_1;x_2)\neq(x_1';x_2')$ et $f(x_1;x_2)=f(x_1';x_2')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $f\left(\frac{1}{2};2\right)=\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)=f\left(2;\frac{1}{2}\right)$ mais $\left(\frac{1}{2};2\right)\neq\left(2;\frac{1}{2}\right)$

Donc : f n'est pas injective

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien