http://www.xriadiat.com **DL1: B** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0"$ 2) $P:\ "\exists x\in\mathbb{R}/x^2-2=0"$

3) $P:\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}""$ 4) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\leq\cos x\leq 1$

5) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n\prec m$ 6) $P:$ est pair$(\exists n\in\mathbb{N})\ 2n+1$

7) $P:(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$

8) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$

9) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$

10) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x+y\leq 1\Rightarrow x^2+y^2\leq 2$

Solution : 1) $\overline{P}\ "\exists x\in\mathbb{R}/x^2\leq 0"$

$"\exists 0\in\mathbb{R}/0^2\leq 0"$ donc : $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}/x^2\leq 0"$ est vraie

Par suite P:est fausse

2) $\overline{P}\quad "\forall x\in\mathbb{R}/x^2-2\neq 0"$

$"\exists x=\sqrt{2}\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \sqrt{2}^2-2=0"$

Donc : P:est vraie

3) $P:\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$

$\overline{P}\quad \exists n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\notin\mathbb{N}"$

$\exists 1\in\mathbb{N}/\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}"$ Donc : $\overline{P}$ est vraie

Et par suite P:est fausse

4) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\leq\cos x\leq 1$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});\cos x\succ 1$ ou $\cos x\prec -1$

On a P:est vraie

5) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n\prec m$

Soit $n\in\mathbb{N}\ (\exists m=n+1\in\mathbb{N}):n\prec n+1$

Donc : P:est vraie

$\overline{P}\quad (\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}):n\geq m$

6) $P:(\exists n\in\mathbb{N})\ 2n+1$ est pair

$\overline{P}:(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ 2n+1$ est impair

$\overline{P}$ est vraie

Donc : P:est fausse

7) $P:\ (\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$

$\overline{P}$: $(\exists n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$ et on a : $(\exists 2\in\mathbb{N});\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$

Donc : $\overline{P}$ est vraie

Et par suite P:est fausse

8) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$

Soit $x\in\mathbb{R}\ (\exists y=x+1\in\mathbb{R}):y-x>0$

Donc : P:est vraie

$\overline{P}$:$(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):y-x\leq 0$

9) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$

$2x+4=0\Leftrightarrow 2x=-4\Leftrightarrow x=-2$

$(\exists! x=-2\in\mathbb{R});2\times(-2)+4=0$

Donc : P:est vraie

$\overline{P}$ $(\forall x\in\mathbb{R});2x+4\neq 0$ ou $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/\,x\neq y\ et\ 2x+4=2x+4=0$

10) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x+y\leq 1\Rightarrow x^2+y^2\leq 2$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x+y\leq 1\ et\ x^2+y^2\succ 2$

$(\exists x=-1\in\mathbb{R})(\exists y=-2\in\mathbb{R}):-1+(-2)\leq 1\ et\ (-1)^2+(-2)^2\succ 2$

Donc : La proposition $\overline{P}$ est vraie par suite : P est fausse

Exercice2 : Montrer à l’aide d’un contre-exemple que les propositions suivantes est fausses :

1) $P:"(\forall x\in]0;1[);\dfrac{3}{x(1-x^2)}\prec 0"$

2) « $Q:(\forall n\in\mathbb{N});n^2+n+1$ est un nombre premier »

3) « $R:(\forall x\in\mathbb{R});3\cos x\neq 2\sin^2 x$ »

Solution : 1) $\overline{P}:"(\exists x\in]0;1[);\dfrac{3}{x(1-x^2)}\geq 0"$

En posant : $x=\frac{1}{2}\in]0;1[$ on aura : $\dfrac{3}{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}=\dfrac{3}{\frac{3}{\frac{8}{2}}}=8\geq 0$

Donc : $\left(\exists x=\frac{1}{2}\in]0;1[\right)/\dfrac{3}{x(1-x^2)}\geq 0$

Donc : La proposition $\overline{P}$: est vraie

Par suite : P est fausse

2) « $\overline{Q}:(\exists n\in\mathbb{N});n^2+n+1$ n’est pas un nombre premier »

$(\exists n=4\in\mathbb{N});4^2+4+1=21=3\times 7$ N’est pas un nombre premier

Donc : La proposition $\overline{Q}$: est vraie

Par suite : Q est fausse

3) « $\overline{R}:(\exists x\in\mathbb{R});3\cos x=2\sin^2 x$ »

$\left(\exists x=\frac{\pi}{3}\in\mathbb{R}\right);3\cos\frac{\pi}{3}=2\sin^2\frac{\pi}{3}$

Donc : La proposition $\overline{R}$: est vraie

Par suite : R est fausse

Exercice3 : Montrer que : $\forall x \geq 2 \;; \forall y \geq 3 : 2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}=x+y \Leftrightarrow x=3 \text{ et } y=7$.

Solution : Soient : $x \geq 2 \quad et \quad y \geq 3$

$2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}=x+y \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{x-2}-4\sqrt{y-3}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}^2-2\sqrt{x-2}+1+\sqrt{y-3}^2-2\times 2\sqrt{y-3}+2^2=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-3}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1=0 \text{ et } \sqrt{y-3}-2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1 \text{ et } \sqrt{y-3}=2 \Leftrightarrow x-2=1 \text{ et } y-3=4 \Leftrightarrow x=3 \text{ et } y=7$

Exercice4 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}>1$

Solution : Nous raisonnons par équivalence

Soit : $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}>1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\right)^2>1^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2>4n(n+1)$

$\Leftrightarrow 4n^2+4n+1>4n^2+4n \Leftrightarrow 1>0$

Et puisque on a : $1>0$ est une proposition vraie

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}>1$

Exercice5 : Soient $(x;y)\in\mathbb{Q}^2$ tels que : $2xy+x^2+5y^2=16$

Montrer que : $x \neq y$

Solution : Soient $(x;y)\in\mathbb{Q}^2$ tels que : $2xy+x^2+5y^2=16$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x=y$

Comme on a : $2xy+x^2+5y^2=16$ et $x=y$ Alors : $2xx+x^2+5x^2=16$

Donc : $\Rightarrow 8x^2=16 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$ contradiction car $x\in\mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Par suite : $x \neq y$

Exercice6 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $\left|2x^2-x-6\right|-\left|x+1\right|-1=0 \quad (1)$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (2) : $\sqrt{3x+4}=x$

Solution : 1) On résout d'abord les Equations :

$x^2-x-6=0$ et $x+1=0$

Les solutions de l'équation : $2x^2-x-6=0$ dans $\mathbb{R}$ sont : 2 et $\dfrac{-3}{2}$.

l'équation $x+1=0$ admet unique solution : -1

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		-1		2		$+\infty$
$2x2-x-6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

On va Opérer par disjonction de cas :

<u>Premier cas :</u> si $x\in\left]-\infty;\dfrac{-3}{2}\right]$ alors $\left|2x^2-x-6\right|=2x^2-x-6$ et $\left|x+1\right|=-x-1$

Donc l'équation (1) devient : $(1)\Leftrightarrow 2x^2-x-6+x+1-1=0$

$(1)\Leftrightarrow 2x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \; ou \; x=\sqrt{3}$

PROF: ATMANI NAJIB

et comme : $\sqrt{3} \notin \left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ et $-\sqrt{3} \in \left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

Donc $S_1 = \left\{-\sqrt{3}\right\}$

<u>Deuxième cas :</u> si $x \in \left[-\frac{3}{2};-1\right]$ alors $\left|2x^2 - x - 6\right| = -\left(2x^2 - x - 6\right)$ et $\left|x+1\right| = -x-1$

Donc l'équation (1) devient : $(1) \Leftrightarrow -2x^2 + x + 6 + x + 1 - 1 = 0$

$(1) \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 6 = 0$

$\Delta = 4 + 24 = 28 \succ 0$

L'équation admet deux solutions distinctes :

$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $x' = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ et comme : $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \notin \left[-\frac{3}{2};-1\right]$ Donc : $S_2 = \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$

<u>3ième cas :</u> si $x \in [-1;2]$

Alors $\left|2x^2 - x - 6\right| = -\left(2x^2 - x - 6\right)$ et $\left|x+1\right| = x+1$

Donc l'équation (1) devient : $(1) \Leftrightarrow -2x^2 + x + 6 - x - 1 - 1 = 0$

$(1) \Leftrightarrow 4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2} \notin [-1;2]$

Donc : $S_3 = \left\{\sqrt{2}\right\}$

<u>4ième cas :</u> si $x \in [2;+\infty[$

Alors $\left|2x^2 - x - 6\right| = 2x^2 - x - 6$ et $\left|x+1\right| = x+1$

Donc l'équation (1) devient : $(1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 - x - 1 - 1 = 0$

$(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0$

$\Delta = 17 \succ 0$; L'équation admet deux solutions distinctes : $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ et $x' = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$

et comme : $x = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \notin [2;+\infty[$ Donc : $S_4 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'Equation (1) est :

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left\{-\sqrt{3};\frac{1-\sqrt{13}}{2};\sqrt{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

2) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation (2): $\sqrt{3x+4} = x$

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (2)

$$D_2 = \left\{x \in \mathbb{R} / 3x + 4 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq -\frac{4}{3}\right\} = \left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$$

Soit $x \in \left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$

$\sqrt{3x+4} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = x^2 \;\; et \;\; x \geq 0$

$\Leftrightarrow 3x + 4 = x^2 \;\; et \;\; x \geq 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \;\; et \;\; x \geq 0$

et comme : $\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times 4 = 25 \succ 0$

L'équation admet deux solutions distinctes : $x=\frac{-3+\sqrt{25}}{-2}=-1$ et $x'=\frac{-3-\sqrt{25}}{-2}=4$ et comme :

$-1\prec 0\ \ et\ \ 4\succ 0$ Donc l'ensemble des solutions de L'équation (2) est : $S=\{4\}$

Exercice7 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ ;\ \ \frac{n^2+4}{n^2+5}\notin\mathbb{N}$

2)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ ;\ \sqrt{n^2+14}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Méthode1 : Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{n^2+4}{n^2+5}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{n^2+4}{n^2+5}=m$

$\Rightarrow n^2+4=m\left(n^2+5\right)\Rightarrow n^2+5 / n^2+4$

et comme : $n^2+5\succ n^2+4$

C'est une contradiction car si n^2+5 / n^2+4

Alors : $n^2+5\le n^2+4\Rightarrow 5\le 4$

Ceci signifie que : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ ;\ \frac{n+2}{n+3}\notin\mathbb{N}$

Méthode2 : direct : On a : $n\in\mathbb{N}$ donc $n^2+4\prec n^2+5$

Donc $0\prec\frac{n^2+4}{n^2+5}\prec 1$

Donc : $\frac{n^2+4}{n^2+5}\notin\mathbb{N}$ car un nombre strictement compris entre deux entiers consécutifs :0 et 1 ne peut pas être entier

2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+14}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n^2+14}=m$

$\sqrt{n^2+14}=m\Rightarrow n^2+14=m^2\Rightarrow m^2-n^2=14=2\times 7\Rightarrow(m-n)(m+n)=2\times 7$

$\Rightarrow m-n\ et\ m+n$ des diviseurs de 14 et $D_{14}=\{1;2;7;14\}$ avec : $(m-n)+(m+n)=2m$ paire

Impossible de trouver : $m\ et\ n$

C'est une contradiction

Ceci signifie que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{n^2+14}\notin\mathbb{N}$

Exercice8 : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$: On pose : $U_n=(1+1)^2\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2$

1) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ U_{n+1}=U_n\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ U_n\succ 2n+3$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};\ n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6

Solution :1) a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ U_{n+1}=U_n\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$

Soit : $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=(1+1)^2\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{2(n+1)+1}\right)^2$

$$U_{n+1}=\underbrace{(1+1)^2\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2}_{=U_n}\times\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$$

Donc : $U_{n+1}=U_n\times\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$

b) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_n\succ 2n+3$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons :

$U_0=(1+1)^2=4$ et $2n+3=2\times0+3=3$ et $U_0\succ 2\times0+3$

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $U_n\succ 2n+3$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $U_{n+1}\succ 2(n+1)+3$

C'est-à-dire : Montrons alors que : $U_{n+1}\succ 2n+5$

On a : $U_{n+1}=U_n\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$ et comme : $U_n\succ 2n+3$ alors : $U_{n+1}\succ(2n+3)\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$

Puisque : $(2n+3)\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2=\frac{4(n+2)^2}{2n+3}\succ 2n+5$

Donc : $U_{n+1}\succ 2n+5$

Conclusion : D'après le principe de récurrence on conclut que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_n\succ 2n+3$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N};\ n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0(0+1)(0+2)=0$ est divisible par 6

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/\,n(n+1)(n+2)=6k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)(n+2)(n+3)=6k''$??

$(n+1)(n+2)(n+3)=n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)\ =6k+3\times2k'$ car $(n+1)(n+2)$ est pair

$$=6k+6k'=6(k+k')=6k''\quad k''\in\mathbb{N}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence on conclut que :

$\forall n\in\mathbb{N};\ n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6

Exercice9 : On considère dans $\mathbb{Z}$ les deux parties suivantes :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x+10}{x-5}\in\mathbb{Z}\right\}$

1)a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\})\frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$

1)b) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

2) Déterminer : A ; B ; $A-B;B-A$ et $A\Delta B$ en extension

3)On admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de $\mathbb{Z}$: $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A\Delta X=B$

Solution : 1) a) il est aisé de voir que :

$(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\})\frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$

1) b) il est aisé aussi de voir que

PROF: ATMANI NAJIB

$(\forall x\in\mathbb{Z})2x-1+\frac{9}{2x-1}=+\frac{(2x-1)^2+9}{2x-1}=\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}$

2) Détermination de : A ?

On a : $A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $(\forall x\in\mathbb{Z})2x-1\in\mathbb{Z}$ et $\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

En déduit que : $(\forall x\in\mathbb{Z})$; $x\in A\Leftrightarrow\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x-1+\frac{9}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{9}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x-1 divise 9$

$\Leftrightarrow 2x-1\in\{-9;-3;-1;1;3;9\}\Leftrightarrow 2x\in\{-8;-2;0;2;4;10\}$

$\Leftrightarrow x\in\{-4;-1;0;1;2;5\}$ Donc : $A=\{-4;-1;0;1;2;5\}$

Détermination de : B ?

Soit $x\in\mathbb{Z}$ de façon analogue nous pouvons écrire :

$x\in B\Leftrightarrow x\neq 5 et x-5 divise 15$

$\Leftrightarrow x-5\in\{-15;-5;-3;-1;1;3;5;15\}$

$\Leftrightarrow x\in\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$

Donc : $B=\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$

Détermination de : $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$?

$A-B=\{-4;-1;0;1;2;5\}-\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}=\{-4;-1;1;5\}$

$A-B=\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}-\{-4;-1;0;1;2;5\}=\{-10;4;6;8;10;20\}$

$A\Delta B=(A-B)\cup(A-B)=\{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

3)Résolution dans $P(\mathbb{Z})$ de l'équation : $A\Delta X=B$

On trouve : $X=\{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

Exercice10 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $\begin{cases}B-A=C-A\\A\cap B=A\cap C\end{cases}\Rightarrow B=C$

Solution : On suppose que : $B-A=C-A \ et\ A\cap B=A\cap C$

$\subset$) Montrons que $B\subset C$?

Soit $x\in B$

Si $x\in A\Rightarrow x\in B$ et $x\in A\Rightarrow x\in A\cap B$

$\Rightarrow x\in A\cap C$ car : $A\cap B=A\cap C$

C'est-à-dire : $x\in C$

Si $x\notin A\Rightarrow x\in B-A\Rightarrow x\in C-A$ C'est-à-dire : $x\in C$

Dans tous les cas, on conclut que : $B\subset C$

$\supset$) Montrons que $C\subset B$?

La même démarche car B *et* C jouent des rôles symétriques.

On a donc : $B\subset C$ et $C\subset B$

Conclusion : $B=C$

Exercice11: Soit l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\\x\mapsto\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\end{array}$

1) Montrer que f n'est pas surjective

2) Montrer que $f\left(\mathbb{R}^{+}\right)=\left[-\frac{1}{3};1\right[$

3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+}$ dans $\left[-\frac{1}{3};1\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

Soit $y\in\mathbb{R}$: Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$f\left(x\right)=y\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}=y\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=y\left(\sqrt{x}+3\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}-y\sqrt{x}=3y+1\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(1-y\right)=3y+1$

Pour : $y=1$ on a : $0=+1$ absurde

Puisque l'équation $f(x)=1$ n'admet pas de solution

Donc : f n'est pas surjective

2) Soit $x\in\mathbb{R}^{+}$; $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}+3-3-1}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}-\frac{4}{\sqrt{x}+3}$

Donc : $f\left(x\right)=1-\frac{4}{\sqrt{x}+3}$; $\forall x\in\mathbb{R}^{+}$

Soit $x\in\mathbb{R}^{+}$ $\Rightarrow x\geq0\Rightarrow\sqrt{x}\geq0\Rightarrow\sqrt{x}+3\geq3$

$\Rightarrow0\prec\frac{1}{\sqrt{x}+3}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow-\frac{4}{3}\leq\frac{-4}{\sqrt{x}+3}\prec0\Rightarrow-\frac{4}{3}+1\leq\frac{-4}{\sqrt{x}+3}+1\prec1$

$\Rightarrow-\frac{1}{3}\leq1-\frac{4}{\sqrt{x}+3}\prec1\Rightarrow-\frac{1}{3}\leq f\left(x\right)\prec1$

Donc : $f\left(\mathbb{R}^{+}\right)\subset\left[-\frac{1}{3};1\right[$

Inversement : Soit $y\in\left[-\frac{1}{3};1\right[$

Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$f\left(x\right)=y\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}=y\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=y\left(\sqrt{x}+3\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}-y\sqrt{x}=3y+1\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(1-y\right)=3y+1\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{3y+1}{1-y}$ et Puisque $y\in\left[-\frac{1}{3};1\right[$

Alors : $-\frac{1}{3}\leq y\prec1\Rightarrow-1\leq3y\prec3\Rightarrow0\leq3y+1\ et\ 1-y\succ0$

Donc : $\frac{3y+1}{1-y}\geq0$

Par suite : $\sqrt{x}=\frac{3y+1}{1-y}\Leftrightarrow x=\left(\frac{3y+1}{1-y}\right)^{2}\geq0$

Donc : il existe un $x\in\mathbb{R}^{+}$ tel que : $f(x)=y$

Donc : $y\in\left[-\frac{1}{3};1\right[\Rightarrow y\in f\left(\mathbb{R}^{+}\right)$

Donc : $\left[-\frac{1}{3};1\right[\subset f\left(\mathbb{R}^+\right)$ par suite : $f\left(\mathbb{R}^+\right)=\left[-\frac{1}{3};1\right[$

3) Soit $y\in\left[-\frac{1}{3};1\right[$: Résolvons l'équation : $f(x) = y$

La même démarche donne : $f\left(x\right)=y \Leftrightarrow x=\left(\frac{3y+1}{1-y}\right)^2 \geq 0$

Donc : $\forall y\in\left[-\frac{1}{3};1\right[;\exists! x\in\mathbb{R}^+ / f\left(x\right)=y$

Conclusion : f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[-\frac{1}{3};1\right[$

$f\left(x\right)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}\left(y\right)=\left(\frac{3y+1}{1-y}\right)^2$ et $f^{-1} : \left[-\frac{1}{3};1\right[\to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \left(\frac{3x+1}{1-x}\right)^2$

Exercice12: Soit les applications suivantes :

$f : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sin\left(x\right)\end{array}$ $g : \begin{array}{l}\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}\\ \left(n;p\right)\mapsto n+p\end{array}$ $h : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ \left(x;y\right)\mapsto\left(x+3y\ ;x-y\right)\end{array}$

1) a) f est-elle injective ? b) f est-elle surjective ?
2) Montrer que g est surjective
3) Déterminer : $g\left(\mathbb{N}^2\right)$
4) Déterminer : $g^{-1}\left(\left\{2\right\}\right)$
5) g est-elle injective ?
6) Montrer que h est bijective
7) Déterminer : h^{-1}
8) Déterminer : $h\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $h^{-1}\left(\mathbb{R}^2\right)$

Solution : 1) a) On a : $f\left(0\right)=\sin 0=0$ et $f\left(\pi\right)=\sin\pi=0$

Donc : : $\exists 0\in\mathbb{R}$; $\exists\pi\in\mathbb{R}$: $f\left(0\right)=f\left(\pi\right)$ Mais $0\neq\pi$

Donc : f n'est pas injective

b) Si je trouve : $y\in\mathbb{R}$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$ on peut affirmer que f n'est pas surjective.

Si je prends : $y=2$ Il n'existe pas : $x\in\mathbb{R}$ tel que : $\sin x=2$

C'est-à-dire : 2 n'a pas d'antécédents

Donc : f n'est pas surjective.

2) g : $\begin{array}{l}\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}\\ \left(n;p\right)\mapsto n+p\end{array}$ Montrons que g est surjective.

g est surjective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall p\in\mathbb{N}$; $\exists\left(n;m\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Tel que : $g\left(n;m\right)=p$ c'est-à-dire : $n+m=p$

Soit : $p\in\mathbb{N}$

Si : $p=0$ alors : $0+0=0=p$

Donc : $\exists\left(0;0\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $0+0=p$

Si : $p\neq 0$ alors : $p\geq 1$ Alors : $\underbrace{\left(p-1\right)}_{n}+\underbrace{1}_{m}=p$

Il suffit de prendre : $n = p-1$ car : $m=1$

Donc : $\exists(n=p-1;m=1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $n+m=p$

C'est-à-dire : $\forall\, p\in\mathbb{N}$; $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; tel que : $g(n;m)=p$

Donc : g est surjective.

3) Déterminons : $g\left(\mathbb{N}^2\right)$

Puisque : g est surjective alors : $g\left(\mathbb{N}^2\right)=\mathbb{N}$

4) Déterminons : $g^{-1}\left(\{2\}\right)$

$$\begin{aligned}(n;m)\in g^{-1}\left(\{2\}\right) &\Leftrightarrow (n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ et } g(n;m)=2\\ &\Leftrightarrow (n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ et } n+m=2\\ &\Leftrightarrow (n;m)\in\{(0;2);(2;0);(1;1)\}\end{aligned}$$

Donc : $g^{-1}\left(\{2\}\right)=\{(0;2);(2;0);(1;1)\}$

5) $g : \begin{array}{l}\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}\\ (n;p)\mapsto n+p\end{array}$

On a : $g(0;2)=g(1;1)=2$ et $(0;2)\neq(1;1)$

Donc : g n'est pas injective.

6) $h : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\mapsto(x+3y\ ;\ x-y)\end{array}$ Montrons que h est bijective :

Soit : $(z;t)\in\mathbb{R}^2$; $\exists?!(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $h(x;y)=(z;t)$??

$h(x;y)=(z;t)\Leftrightarrow(x+3y\ ;\ x-y)=(z;t)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=z\\ x-y=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y=z-t\\ x-y=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{z-t}{4}\\ x=y+t=\dfrac{z-t}{4}+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{z+3t}{4}\in\mathbb{R}\\ y=\dfrac{z-t}{4}\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$\forall(z;t)\in\mathbb{R}^2$; $\exists!(x;y)\in\mathbb{R}^2$ Tel que : $h(x;y)=(z;t)$

Donc : h bijective

7) Déterminons h^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$$h(x;y)=(z;t)\Leftrightarrow(x;y)=h^{-1}(z;t)=\left(\frac{z+3t}{4};\frac{z-t}{4}\right)$$

Donc : $h^{-1} : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\mapsto\left(\dfrac{x+3y}{4};\dfrac{x-y}{4}\right)\end{array}$

8) Déterminons : $h\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $h^{-1}\left(\mathbb{R}^2\right)$

Puisque : h et h^{-1} sont surjectives alors : $h\left(\mathbb{R}^2\right)=\mathbb{R}^2$ et $h^{-1}\left(\mathbb{R}^2\right)=\mathbb{R}^2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB