http://www.xriadiat.com **DL1: A** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ La logique
- ✓ ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P:(\exists x \in \mathbb{Z});\frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

2) $P:(\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}):y^2 = x$

3) $P:(\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}):x - y \succ 0$

4) $P:(\forall x \in [0;1]):x^2 \geq x$

5) $P:(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

6) $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}):x^2+y^2 \geq x+y$

7) $P:(\forall x \in \mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x} \geq 2$

8) $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$

9) $P:(\forall \varepsilon \succ 0);(\exists \alpha \succ 0)/|x-1| \prec \alpha \Rightarrow |2x-2| \prec \varepsilon$

10) $P:(\forall \varepsilon \geq 0);(\exists q \in \mathbb{Q}^*)$ $tel\ que:\ 0 \leq q \leq \varepsilon$

11) $P:(\exists! x \in \mathbb{R});x^2 = 2$

Exercice2 : Montrer que : $\forall x \geq 0\ ;\forall y \geq 1;\forall z \geq 2:$.

$$x \neq 1\ ou\ y \neq 2\ ou\ z \neq 3 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2} \neq \frac{x+y+z}{2}$$

Exercice3 : 1) Montrer que :$\left(\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right)$ $\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1} \prec \sqrt{a}-\sqrt{b} \Leftrightarrow a \succ b$

3) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

4)a) Soit : $(a;b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$ Montrer que :$\left(a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \left(a=b\ ou\ a=\frac{1}{b}\right)$

b) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$

Exercice4 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$.

2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}-x \succ 0$.

Exercice5 : 1) Montrer que : $\forall (x;y) \in ([0;+\infty[)^2$; $x+y \geq 2\sqrt{xy}$

2) Déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $x+\frac{1}{x} \geq 2$

3) Déduire que : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a} \geq 4$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante (I): $\sqrt{x^2-5x+6} \geq x+4$

Exercice7 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$.

Exercice8 : Soient les ensembles : $E=\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2-xy-2y^2=0\}$

$F=\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0\}$

$H=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y^2-2y(x+1)+2x=0\right\}$

1) Montrer que : $F\subset E$

2) Déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$; est ce que on a $E\subset F$?

3) Montrer que : $E=F\cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles : $A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\right\}$;

$B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\right\}$

a) Montrer que : $H=A\cup B$

b) Déterminer : $H\cap F$

Exercice9 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E

Monter que par contraposition les assertions suivantes :

1) $A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$

2) $A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

Exercice10 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E ; Monter que :

1) $A\setminus(B\setminus C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

2) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

3) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

Exercice11 : Soit E un ensemble et G et H deux parties de E

On note : $\mathcal{P}(G)$: l'ensemble des parties de l'ensemble G

1) Montrer que : $\mathcal{P}(G\cap H)=\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

2) Montrer que : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cup H)$

3) Montrer que : on général on n'a pas : $\mathcal{P}(G\cup H)=\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)$

Exercice12 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}\end{array}$

1) a) Montrer que : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$

b) f est-elle surjective ? justifier

2) f est-elle injective ? justifier

2) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$ et $f^{-1}(\{4\})$

3) Montrer que : f est une bijection de $[-1;1]$ vers $[-1;1]$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice13 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x;y)\mapsto(x+y\ ;\ x-y)\end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien