http://www.xriadiat.com **DL1: A** **PROF: ATMANI NAJIB**

# 1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

## *Correction :* Devoir libre1 de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **La logique**
- ✓ **ENSEMBLES ET APPLICATIONS**

**Exercice1 :** Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P:(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$

2) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

3) $P:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x-y\succ 0$

4) $P:(\forall x\in[0;1]):x^2\geq x$

5) $P:(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

6) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\geq x+y$

7) $P:(\forall x\in\mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x}\geq 2$

8) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$

9) $P:(\forall\varepsilon\succ 0);(\exists\alpha\succ 0)/|x-1|\prec\alpha\Rightarrow|2x-2|\prec\varepsilon$

10) $P:(\forall\varepsilon\geq 0);(\exists q\in\mathbb{Q}^*)$ *tel que*: $0\leq q\leq\varepsilon$

11) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$

**Solution :** $(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$ 1) $P$:

$(\exists x=4\in\mathbb{Z});\frac{4}{4}\in\mathbb{Z}$

Donc : $P$ est vraie

Et on a : $\overline{P}$ $(\forall x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\notin\mathbb{Z}$

2) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

$\overline{P}$ $(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):y^2\neq x$

$(\exists -1\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):y^2\neq -1$

$\overline{P}$ est vraie

Donc : $P$:est fausse

3) $P:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x-y\succ 0$

$\overline{P}$ $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x\leq 0$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$y-x\leq 0\Leftrightarrow y\leq x$

$(\exists y=x-1\in\mathbb{R}):y-x\leq 0$

$\overline{P}$ est vraie

Donc : $P$:est fausse

4) $P:(\forall x\in[0;1]):x^2\geq x$

$\overline{P}:(\exists x\in[0;1]):x^2\prec x$

En posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc $P$ est fausse

5) $P:(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

$\overline{P}:(\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$

En posant : $a=4$ et $b=3$ on aura : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc $P$ est fausse

6) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\geq x+y$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\prec x+y$

En posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec 1+\frac{1}{2}$

c a d $\frac{5}{4}\prec\frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie

Donc : $P$ est fausse

7) $P:(\forall x\in\mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x}\geq 2$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x}\prec 2$

En posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2\prec 2$

Donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc $P$ est fausse

8) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2\neq 0$

On a : $\Delta=x^2-4x^2=-3x^2$

si $\Delta\prec 0$ alors ; $y^2-xy+x^2\succ 0$ donc : $y^2-xy+x^2\neq 0$

En posant : $x=1$ on aura : $\Delta=-3\prec 0$

Donc : $(\exists x=1\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2\neq 0$

Donc La proposition $\overline{P}$: est vraie donc $P$ est fausse

9) $P:(\forall\varepsilon\succ 0);(\exists\alpha\succ 0)/|x-1|\prec\alpha\Rightarrow|2x-2|\prec\varepsilon$

Soit $\varepsilon\succ 0$

$|2x-2|\prec\varepsilon\Rightarrow 2|x-1|\prec\varepsilon\Rightarrow|x-1|\prec\frac{\varepsilon}{2}$

$\left(\exists\alpha=\frac{\varepsilon}{2}\succ 0\right)/|x-1|\prec\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|2x-2|\prec\varepsilon$

On a $P$:est vraie

$\overline{P}:(\exists\varepsilon\succ 0);(\forall\alpha\succ 0)/|x-1|\prec\alpha\ \ et\ \ |2x-2|\geq\varepsilon$

10) $P:(\forall\varepsilon\geq 0);(\exists q\in\mathbb{Q}^*)\ tel\,que:\ 0\leq q\leq\varepsilon$

$P$:est vraie

$\overline{P}:(\exists\varepsilon\geq 0);(\forall q\in\mathbb{Q}^*):\ q\prec 0\ ou\ \varepsilon\prec q$

11) $P:(\exists!x\in\mathbb{R});x^2=2$

$x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ \ ou\ \ x=-\sqrt{2}$

$P$:est fausse(pas d'unicité)

$\overline{P}$ $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\neq 2$ ou $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/\,x\neq y\ et\, x^2-2=y^2-2=0$

**Exercice2 :** Montrer que : $\forall x\geq 0\ ;\forall y\geq 1;\forall z\geq 2:.$

$$x\neq 1\ ou\ y\neq 2\ ou\ z\neq 3\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}\neq\frac{x+y+z}{2}$$

**Solution :** Par contraposition montrons que : $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\dfrac{x+y+z}{2}\Rightarrow x=1\ et\ y=2\ et\ z=3$?

Soient : $x\geq 0\quad et\quad y\geq 2\, et\quad z\geq 3$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}+2\sqrt{z-2}=x+y+z$$

$$\Rightarrow x-2\sqrt{x}+y-2\sqrt{y-1}+z\ -2\sqrt{z-2}=0$$

$$\Rightarrow\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1\right)-1+\left(\sqrt{y-1}^2-2\sqrt{y-1}+1\right)+\left(\sqrt{z-2}^2\ -2\sqrt{z-2}+1\right)+1=0$$

$$\Rightarrow\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1\right)+\left(\sqrt{y-1}^2-2\sqrt{y-1}+1\right)+\left(\sqrt{z-2}^2\ -2\sqrt{z-2}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2=0\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\ et\ \left(\sqrt{y-1}-1\right)^2=0\ et\ \left(\sqrt{z-2}-1\right)^2=0$$

Car $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$ et $\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2\geq 0$ et $\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2\geq 0$

$$\Rightarrow\sqrt{x}=1\ et\ \sqrt{y-1}=1\ et\ \sqrt{z-2}=1\ \Rightarrow x=1\ et\ y-1=1\ et\ z-2=1\ \Rightarrow x=1\ et\ y=2\ \ et\ z=3$$

Par contraposition en déduit que : $x\neq 1\ ou\ y\neq 2\ ou\ z\neq 3\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}\neq\dfrac{x+y+z}{2}$

**Exercice3 :** 1) Montrer que :$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right)\ \sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\prec\sqrt{a}-\sqrt{b}\Leftrightarrow a\succ b$

3) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ ; Montrer que : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

4)a) Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ Montrer que :$\left(a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}\right)\Leftrightarrow\left(a=b\ ou\ a=\dfrac{1}{b}\right)$

b) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{17}{4}$

**Solution :** 1) a) $\Rightarrow$:$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

Supposons que ; $a+b=0$ et ( $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ ) et $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b\succ 0$contradiction par suite $a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

Donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

$$\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\prec\sqrt{a}-\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{b}\prec\sqrt{a}+\sqrt{b+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b}\right)^2\prec\left(\sqrt{a}+\sqrt{b+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a+1+2\sqrt{b(a+1)}+b\prec a+2\sqrt{a(b+1)}+b+1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{b(a+1)}\prec 2\sqrt{a(b+1)}\Leftrightarrow\sqrt{b(a+1)}\prec\sqrt{a(b+1)}\Leftrightarrow b(a+1)\prec a(b+1)\Leftrightarrow ab+b\prec ab+a\Leftrightarrow b\prec a$$

Donc : $\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\prec\sqrt{a}-\sqrt{b}\Leftrightarrow a\succ b$

3) Soit : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$$

Or $\sqrt{x^2+1}-1\geq 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1 \Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

4)a) Soit : $(a;b)\in(\mathbb{R}^*)^2$

$$\left(a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0 \Leftrightarrow a-b+\frac{b-a}{ab}=0 \Leftrightarrow a-b-\frac{(a-b)}{ab}=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)=0 \Leftrightarrow a-b=0 \quad ou \ 1-\frac{1}{ab}=0 \Leftrightarrow a=b= \quad ou \ ab=1 \Leftrightarrow a=b= \quad ou \quad a=\frac{1}{b}$$

Donc : $\left(a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \left(a=b \ ou \ a=\frac{1}{b}\right)$

b) Déduction de l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$.

L'équation existe si et seulement si $x\in\mathbb{R}^*$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$ : $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4} \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=4+\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2=4 \ ou \ \frac{1}{x^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=-2 \ ou \ x=2 \ ou \ x=-\frac{1}{2} \ ou \ x=-\frac{1}{2}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S=\left\{-2;-\frac{1}{2};\frac{1}{2};2\right\}$

**Exercice4 : 1)** Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2+1}+x\succ 0$ .

2) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2+1}-x\succ 0$ .

**Solution :** Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

<u>Premier cas :</u> $x\geq 0$ Alors $x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 1\succ 0$

Donc $\sqrt{x^2+1}\succ 0$ et on a $x\geq 0$ donc $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

<u>Deuxième cas :</u> $x\leq 0$. On a $x^2+1\succ x^2$

Donc $\sqrt{x^2+1}\succ\sqrt{x^2}$ par suite : $\sqrt{x^2+1}\succ |x|$ or $x\leq 0$

Alors on a : $\sqrt{x^2+1}\succ -x$ donc $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

2) Soit : $x\in\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\succ 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2+1}-x\succ 0$ Car : $\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

**Exercice5 :** 1) Montrer que : $\forall (x;y)\in([0;+\infty[)^2$ ; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

2) Déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ ; $x+\frac{1}{x}\geq 2$

3) Déduire que : $\forall (a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ ; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

**Solution :1)** Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(x;y)\in([0;+\infty[)^2$ :On a : $x+y\geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$$

Et puisque on a : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$ ; $\forall(x;y)\in\left([0;+\infty[\right)^2$ (vraie)

Alors : $\forall(x;y)\in\left([0;+\infty[\right)^2$ ; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ ; on a : $\forall(x;y)\in\left([0;+\infty[\right)^2$ ; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

Par exemple on prend : $x$ *et* $\frac{1}{x}$ et on applique la proposition :

$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{1}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ ; $x+\frac{1}{x}\geq 2$

3) Déduisons que : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ ; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Soit $(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ : on a : $\forall(x;y)\in\left([0;+\infty[\right)^2$ ; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

On donc : d'après 1) si on prend : $x=\frac{a^2+1}{b}$ et $y=\frac{b^2+1}{a}$

On aura : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{b}\times\frac{b^2+1}{a}}$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}}$

On donc : d'après 2) $a+\frac{1}{a}\geq 2\Leftrightarrow\frac{a^2+1}{a}\geq 2$ et aussi $b+\frac{1}{b}\geq 2\Leftrightarrow\frac{b^2+1}{b}\geq 2$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}}\geq 2\sqrt{2\times 2}$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Par suite : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ ; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

**Exercice6 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante $(I)$: $\sqrt{x^2-5x+6}\geq x+4$

**Solution :** On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation $(I)$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-5x+6\geq 0\right\}$

$x^2-5x+6$ : $\Delta=25-4\times 6=1\succ 0$ : $x_1=\frac{5+\sqrt{1}}{2}=3$ et $x_2=\frac{5-1}{2}=2$

$D=]-\infty;2]\cup[3;+\infty[$

Soit $x\in]-\infty;2]\cup[3;+\infty[$ et $S$ l'ensemble des solutions de $(I)$

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2-5x+6}\geq x+4$

$x+4\leq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-4]$

1 cas : si $x\in]-\infty;-4]\cap\left(]-\infty;2]\cup[3;+\infty[\right)=]-\infty;-4]$

L'Inéquation est vraie pour tout $x\in]-\infty;-4]$ car $x+4\leq 0$ et $\sqrt{x^2-5x+6}\geq 0$

Donc $S_1=]-\infty;-4]$

2 cas : si $x\in]-4;+\infty[\cap\left(]-\infty;2]\cup[3;+\infty[\right)=]-4;2]\cup[3;+\infty[$ alors : $x+4\succ 0$

$x \in S_2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+6} \geq x+4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2 \geq (x+4)^2$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6 \geq x^2+8x+16 \Leftrightarrow -13x \geq 10 \Leftrightarrow x \leq -\frac{10}{13} \quad \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{10}{13}\right]$

Donc $S_2 = \left]-\infty; -\frac{10}{13}\right] \cap \left(]-4;2] \cup [3;+\infty[\right) = \left]-4; -\frac{10}{13}\right]$

Donc : $S = S_1 \cup S_2 = ]-\infty;-4] \cup \left]-4; -\frac{10}{13}\right] = \left]-\infty; -\frac{10}{13}\right]$

**Exercice7 :** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$.

**Solution :** Notons P(n) La proposition :" $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$\sum_{k=1}^{1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1^2}{(2\times1-1)(2\times1+1)} = \frac{1}{1\times3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1\times(1+1)}{2(2\times1+1)} = \frac{2}{2\times2} = \frac{1}{3}$

Donc $1=1$. Donc P(1) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{(n+1)\times(n+2)}{2(2n+3)}$ ??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$

et on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n\times(n+1)(2n+3)}{2(2n+1)(2n+3)} + \frac{2(n+1)^2}{2(2n+1)(2n+3)}$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\times(n+1)(2n+3)+2(n+1)^2}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)\left[n\times(2n+3)+2(n+1)\right]}{2(2n+1)(2n+3)}$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}$

Et on remarque que : $2n^2+5n+2=(2n+1)(n+2)$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$ c'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$

**Exercice8 :** Soient les ensembles : $E = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2-xy-2y^2=0\right\}$

$F = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0\right\}$

$H=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y^2-2y(x+1)+2x=0\right\}$

1) Montrer que : $F\subset E$

2) Déterminer $y$ de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$ ; est ce que on a $E\subset F$ ?

3) Montrer que : $E=F\cup G$ ou $G$ est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles : $A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\right\}$ ;

$B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\right\}$

a) Montrer que : $H=A\cup B$

b) Déterminer : $H\cap F$

**Solution :** 1) Montrons que : $F\subset E$ ?

On a : $(x;y)\in F \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$

$\Rightarrow x^2-xy-2y^2=y^2+y^2-2y^2=0 \Rightarrow (x;y)\in E$

Donc : $F\subset E$

2) $(1;y)\in E \Leftrightarrow 1-y-2y^2=0 \Leftrightarrow (1+y)(1-2y)=0$

$\Leftrightarrow y=1$ ou $y=\frac{1}{2}$

Donc : $\left(1;\frac{1}{2}\right)\in E$ ou $\left(1;\frac{1}{2}\right)\notin F$

Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2 / (x;y)\notin F$ et $(x;y)\in E$

Donc : $E\not\subset F$

3) $(x;y)\in E \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0 \Leftrightarrow x^2-2xy+xy-2y^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0 \Leftrightarrow x(x+y)-2y(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow x+y=0$ ou $x-2y=0$

$\Leftrightarrow (x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Avec : $G=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x-2y=0\right\}$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ $(x;y)\in E \Leftrightarrow (x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Donc : $E=F\cup G$

4) a) $(x;y)\in H \Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+2x=0$

$\Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[y-(x+1)\right]^2=(x+1)^2-2x \Leftrightarrow \left[y-(x+1)\right]^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow y=x+1+\sqrt{x^2+1}$ ou $\Leftrightarrow y=x+1-\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x;y)\in A$ ou $(x;y)\in B$

Donc : $H=A\cup B$

4) b) $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in H$ ou $(x;y)\in F$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+2x-2y=0$ et $x=-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x^2+2x+2x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x+4)=0 \\ x=-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ou } x=-\frac{4}{3} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \text{ et } y=0 \text{ ou } x=-\frac{4}{3} \text{ et } y=\frac{4}{3}$$

Donc : $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{(0;0);\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$

$H\cap F=\left\{(0;0);\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$

**Exercice9** : Soient $A$ ; $B$ et $C$ des parties d'un ensemble non vide $E$

Monter que par contraposition les assertions suivantes :

1) $A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$

2) $A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

**Solution :** 1) Montrons que : $A\neq B\Rightarrow A\cap B\neq A\cup B$

On suppose que : $A\neq B$

Alors : $\exists x\in A-B$ ou $\exists x\in B-A$

1ér cas : $\exists x\in A-B$

$x\in A-B\Rightarrow x\in A$ et $x\notin B$

$\Rightarrow x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$

$\Rightarrow A\cup B\neq A\cap B$

2ér cas : $\exists x\in B-A$

$x\in B-A\Rightarrow x\in B$ et $x\notin A$

$\Rightarrow x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$

$\Rightarrow A\cup B\neq A\cap B$

Donc : $A\neq B\Rightarrow A\cap B\neq A\cup B$

Par contraposition on déduit que :

$A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$

2) Montrons que : $B\neq C\Rightarrow A\cap B\neq A\cap C$ ou $A\cup B\neq A\cup C$

On suppose que : $B\neq C$

Alors : $\exists x\in B-C$ ou $\exists x\in C-B$

1ér cas : $\exists x\in B-C\Rightarrow x\in B$ et $x\notin C$

Si $x\in A$ alors : $x\in A\cap B$ et $x\notin A\cap C$

$\Rightarrow A\cap B\neq A\cap C$

Si $x\notin A$ alors : $x\in A\cup B$ et $x\notin A\cup C$

$\Rightarrow A\cup B\neq A\cup C$

Donc : $B\neq C\Rightarrow A\cap B\neq A\cap C$ ou $A\cup B\neq A\cup C$

Par contraposition on déduit que :

$A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

**Exercice10** : Soient $A$ ; $B$ ; $C$ des parties d'un ensemble $E$ ; Monter que :

1) $A\setminus(B\setminus C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

2) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

3) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

**Solution:1)** Methode1:

$A\setminus(B\setminus C)=A\cap\left(\overline{B\setminus C}\right)=A\cap\left(\overline{B\cap\overline{C}}\right)=A\cap\left(\overline{B}\cup C\right)$ car $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{\overline{A}}=A$

$=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

Methode2: a) Montrons que : $A\setminus(B\setminus C)\subset(A\cap C)\cup(A\setminus B)$ ?

Soit : $x\in A\setminus(B\setminus C)\Rightarrow x\in A\quad et\ x\notin B\setminus C$

• Si $x\in C$ alors $x\in A\cap C$

$\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

• Si $x\notin C$ alors $x\notin B$ car sinon : $x\in B$ et $x\notin C$

Alors : $\Rightarrow x \in B \setminus C$ contradiction

Donc : On a : $x \in A \quad et \ x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$

$\Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (A \setminus B)$

Dans tous les cas : $x \in (A \cap C) \cup (A \setminus B)$

Donc : $A \setminus (B \setminus C) \subset (A \cap C) \cup (A \setminus B)$

b) Montrons que : $(A \cap C) \cup (A \setminus B) \subset A \setminus (B \setminus C)$ ?

Montrons que : $A \cap C \subset A \setminus (B \setminus C)$ ①

Soit : $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \quad et \ x \in C \quad \Rightarrow x \in B \setminus C$

$\Rightarrow x \notin B \setminus C \Rightarrow x \in A \setminus (B \setminus C)$

Donc : $A \cap C \subset A \setminus (B \setminus C)$

Montrons que : $A \setminus B \subset A \setminus (B \setminus C)$ ②

Soit : $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \quad et \ x \notin B \quad \Rightarrow x \notin B \setminus C$

$\Rightarrow x \notin B \setminus C \Rightarrow x \in A \setminus (B \setminus C)$

Donc : $A \setminus B \subset A \setminus (B \setminus C)$

① et ② $\Rightarrow (A \cap C) \cup (A \setminus B) \subset A \setminus (B \setminus C)$

Finalement : $A \setminus (B \setminus C) = (A \cap C) \cup (A \setminus B)$

2) Montrons que : $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = A \cap \left(\overline{B \cap C}\right) = A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)$

$= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{C}\right)$ (Loi de Morgan)

$= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

3) Montrons que : $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (A \cap B)$

a) Montrons que : $(A \setminus B) \cap C \subset (A \cap C) \setminus (A \cap B)$

Soit : $x \in (A \setminus B) \cap C \Rightarrow x \in A \setminus B \quad et \ x \in C$

$\Rightarrow (x \in A \ et \ x \notin B) et \ x \in C \Rightarrow (x \in A \ et \ x \in C) \ et (x \in A \ et \, x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in A \cap C) \ et (x \notin A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B)$

D'où : : $(A \setminus B) \cap C \subset (A \cap C) \setminus (A \cap B)$

b) Montrons que : $(A \cap C) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cap C$

Soit : $x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \cap C) \ et (x \notin A \cap B)$

$\Rightarrow (x \in A \ et \ x \in C) \ et (x \notin A \ ou \, x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in A \ et \ x \in C \ et \ x \notin A) \ ou (x \in A \ et \ x \in C \ et \ x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in \varnothing) \ ou (x \in A \ et \ x \notin B \ et \, x \in C) \Rightarrow ((x \in A \ et \ x \notin B) \ et \, x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A - B) \ et (x \in C) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap C$

D'où : : $(A \cap C) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cap C$

Conclusion : $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (A \cap B)$

**Exercice11** : Soit $E$ un ensemble et $G$ et $H$ deux parties de $E$

On note : $\mathcal{P}(G)$ : l'ensemble des parties de l'ensemble $G$

1) Montrer que : $\mathcal{P}(G\cap H)=\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

2) Montrer que : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cup H)$

3) Montrer que : on général on n'a pas : $\mathcal{P}(G\cup H)=\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)$

**Solution :** Remarque : $X\subset E\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(E)$

1) $X\in\mathcal{P}(G\cap H)\Leftrightarrow X\subset G\cap H$

$\Leftrightarrow X\subset G$ et $X\subset H$

$\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(G)$ et $X\in\mathcal{P}(H)$

$\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

Par suite : $\mathcal{P}(G\cap H)=\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

**2)** On a : $G\subset G\cup H$ et $H\subset G\cup H$

Donc : $\mathcal{P}(G)\subset\mathcal{P}(G\cap H)$ et $\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cap H)$

Donc : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cup H)$

3) $H=\{2\}$ et $G=\{1\}$

On a : $H\cup G=\{1;2\}$

$\mathcal{P}(G\cup H)=\{\varnothing;\{1\};\{2\};\{1;2\}\}$

$\mathcal{P}(G)=\{\varnothing;\{1\}\}$ et $\mathcal{P}(H)=\{\varnothing;\{2\}\}$

$\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)=\{\varnothing;\{1\};\{2\}\}$

Donc : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\neq\mathcal{P}(G\cup H)$

**Exercice12** : Soit l'application $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{2x}{x^2+1}\end{array}$

1) a) Montrer que : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$

b) $f$ est-elle surjective ? justifier

2) $f$ est-elle injective ? justifier

2) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$ et $f^{-1}(\{4\})$

3) Montrer que : $f$ est une bijection de $[-1;1]$ vers $[-1;1]$ et déterminer sa bijection réciproque $f^{-1}$.

**Solution :** 1) a) Montrons que : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$

Soit $x\in\mathbb{R}$ : Montrons que $-1\leq\dfrac{2x}{x^2+1}\leq1$

$$1-f(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq0$$

Donc : $\dfrac{2x}{x^2+1}\leq1$

$$f(x)-(-1)=\frac{2x}{x^2+1}+1=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq0$$

Donc : $-1\leq\dfrac{2x}{x^2+1}$ Par suite : $-1\leq\dfrac{2x}{x^2+1}\leq1$

Conclusion : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$

b) Par exemple :2 n'a pas d'antécédents par $f$

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ en effet : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$ et $2\notin[-1;1]$

Donc : $f$ n'est pas surjective

2) $f$ est-elle injective ? justifier

*Démarche1 :* Si je trouve : $x_1\neq x_2$ et $f(x_1)=f(x_2)$ on peut affirmer que $f$ n'est pas injective.

On a : $f(2)=\frac{2\times 2}{2^2+1}=\frac{4}{5}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{5}$

On a : donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)$ mais $\frac{1}{2}\neq 2$

Donc : $f$ n'est pas injective

*Démarche2 :* Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{2x_1}{x_1{}^2+1}=\frac{2x_2}{x_2{}^2+1}\Rightarrow 2x_1\times(x_2{}^2+1)=2x_2\times(x_1{}^2+1)\Rightarrow x_1\times x_2{}^2+x_1=x_2\times x_1{}^2+x_2$$

$$\Rightarrow x_1\times x_2{}^2-x_2\times x_1{}^2+x_1-x_2=0\Rightarrow x_1x_2\times(x_2-x_1)-(x_2-x_1)=0$$

$$\Rightarrow(x_2-x_1)(x_1x_2-1)=0\Rightarrow x_2-x_1=0\ ou\ x_1x_2-1=0\Rightarrow x_2=x_1\ ou\ \boxed{x_1x_2=1}$$

Pour : $\frac{1}{2}\neq 2$ on a ; $\frac{1}{2}\times 2=1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)$

Donc : $f$ n'est pas injective

3) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ : Soit : $y\in[-1;1]$ ; Montrons que : $\exists!x\in[-1;1]$ tel que : $f(x)=y$ ?

$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{2x}{x^2+1}=y\Leftrightarrow x^2y-2x+y=0$ ; $\Delta=4-4y^2=4(1-y^2)\geq 0$ car : $-1\leq y\leq 1$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

Si : $y=0$ alors : $x^2y-2x+y=0\Leftrightarrow x^2\times 0-2x+0=0\Leftrightarrow x=0$ Alors l'équation admet une solution unique : $x=0$

Si : $y=1$ alors : $\Delta=0$Alors l'équation admet une solution unique : $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2y}=\frac{1}{y}=1$

Si : $y=-1$ alors : $\Delta=0$Alors l'équation admet une solution unique : $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2y}=\frac{1}{y}=-1$

Si : $y\notin\{-1;0;1\}$ alors : $x_1=\frac{2+\sqrt{4(1-y^2)}}{2y}=\frac{2+2\sqrt{1-y^2}}{2y}=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x_2=\frac{2-\sqrt{4(1-y^2)}}{2y}=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$

Montrons que : $x_1=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\notin[-1;1]$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\in[-1;1]$

On a : $|y|\prec 1$ donc : $1\prec\frac{1}{|y|}$ et on a : $1\leq 1+\sqrt{1-y^2}$

Donc : $1\prec\frac{\left|1+\sqrt{1-y^2}\right|}{|y|}$ cad $1\prec\left|\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right|$

Donc : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1;1]$ On montre aussi que : $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1;1]$

$\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in [-1;1] \end{cases}$$

Donc : $\forall x \in [-1;1]$ ; $f^{-1} : [-1;1] \to [-1;1]$

$$x \mapsto \begin{cases} f^{-1}(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad si \ \ x \neq 0 \\ f^{-1}(0) = 0 \end{cases}$$

**Exercice13 :** Soit l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x+y \ ; x-y) \end{array}$

1) Montrer que $f$ est injective
2) Montrer que $f$ est surjective
3) Déterminer $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$

**Solution : 1)** Soit : $(x;y)$ ; $(x';y') \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(x;y) = f(x';y')$ :

Montrons que : $(x;y) = (x';y')$ ??

$f(x;y) = f(x';y') \Leftrightarrow (x+y \ ; x-y) = (x'+y' \ ; x'-y')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x'+y' & (1) \\ x-y = x'-y' & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \ \Rightarrow 2x = 2x' \Rightarrow x = x'$

$x+y = x'+y' \quad (1) \quad \Rightarrow x+y = x+y' = 0 \Rightarrow y = y' \quad \Rightarrow x = x' \ \ et \ \ y = y' \Rightarrow (x;y) = (x';y')$

Donc : $f$ est injective

2) Soit : $(z;t) \in E \times E$ ; $\exists ?(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(x;y) = (z;t)$ ??

$$f(x;y) = (z;t) \Leftrightarrow (x+y \ ; x-y) = (z;t) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = z & (1) \\ x-y = t & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$ et $(1)$-$(2)$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x = z+t \\ 2y = z-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z+t}{2} \\ y = \dfrac{z-t}{2} \end{cases}$ Donc : $f$ surjective

3) Déterminons $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$

$f$ est injective et surjective donc bijective

$$f(x;y) = (z;t) \Leftrightarrow (x;y) = f^{-1}(z;t) = \left( \frac{z+t}{2} ; \frac{z-t}{2} \right)$$

Donc : $f^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto \left( \dfrac{x+y}{2} ; \dfrac{x-y}{2} \right) \end{array}$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*