1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°9 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P"\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 = 0"$ 2) $Q"\forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 = 0"$

3) $R"(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) / x + y = 3"$ 4) $S"(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x + y = 3"$

Solution : 1) $P"\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 + 0"$

$"\exists x = 1 \in \mathbb{R} \;\; et \;\; 1^2 - 1 = 0"$

Remarque :(il existe au moins) $"\exists x = -1 \in \mathbb{R} \;\; et \;\; (-1)^2 - 1 = 0"$

Donc : P:est vraie

2) $Q"\forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 = 0"$ et $\overline{Q}$ $"\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 = 0"$

$"\exists 1 \in \mathbb{R} / 1^2 - 1 = 0"$ Donc : $\overline{Q}$ est vraie

Et par suite Q:est fausse

3) $R"(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) / x + y = 3"$

$\overline{R}"(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x + y = 3"$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $(\exists y = 3 - x)$ $/ x + y = 3$

Donc : $\overline{R}$ est vraie

Et par suite R est fausse

4) $S"(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x + y = 3"$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $(\exists y = 3 - x)$ $/ x + y = 3$

Donc : S est vraie

REMARQUE : L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs change la signification et la valeur de vérité d'une proposition

Exercice2 : Donner la négation de chacune des propositions suivantes.

$\overline{P} \wedge Q$; $\overline{P} \vee Q$; $P \vee (Q \wedge R)$; $P \wedge (Q \wedge R)$; $P \Rightarrow \overline{Q}$; $P \Leftrightarrow Q$

Solution :

- ✓ $\overline{\overline{P} \wedge Q}$ est : $\overline{\overline{P}} \vee \overline{Q}$ c'est-à-dire : $P \vee \overline{Q}$
- ✓ $\overline{\overline{P} \vee Q}$ est : $\overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q}$ c'est-à-dire : $P \wedge \overline{Q}$
- ✓ $\overline{P \vee (Q \wedge R)}$ est : $\overline{P} \wedge \overline{(Q \wedge R)}$

C'est-à-dire : $\overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$

- ✓ $\overline{P \wedge (Q \wedge R)}$ est : $\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R}$
- ✓ $\overline{P \Rightarrow \overline{Q}}$ est : $\overline{\overline{P} \vee \overline{Q}}$ C'est-à-dire : $P \wedge Q$
- ✓ $\overline{P \Leftrightarrow Q}$ est : $\overline{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)}$

C'est-à-dire : $\overline{(P \Rightarrow Q)} \vee \overline{(Q \Rightarrow P)}$

C'est-à-dire : $\overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{(\overline{Q} \vee P)}$

C'est-à-dire : $(P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$

Exercice3 : On considère les propositions suivantes :

$P:(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$ et $Q:(\forall n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\in\mathbb{N}$

$R:(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}):\left[\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\Rightarrow |a|\prec c\ et\ |b|\prec c\right]$

1) Déterminer la valeur de vérité de P

2) Ecrire la négation des propositions P et Q et R

3) Montrer que la proposition Q est fausse

4) Montrer que la proposition R est vraie

Solution :1) $P:(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$

$xy+2y+x+2=0\Leftrightarrow y(x+2)+x+2=0\Leftrightarrow (x+2)(y+1)=0$

Si je prends : $y=-1$ alors : $(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$

La proposition P est vraie

2) $\overline{P}:(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2\neq 0$

$\overline{Q}:(\exists n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\notin\mathbb{N}$

$\overline{R}:(\exists(a;b;c)\in\mathbb{R}):\left[\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\ et\left(|a|\geq c\ ou\ |b|\geq c\right)\right]$

3) Déterminons la valeur de vérité de Q

On a : $\overline{Q}:(\exists n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\notin\mathbb{N}$

Pour : $n=1:\sqrt{1(1+1)+1}=\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$

Donc La proposition $\overline{Q}$: est vraie par suite Q est fausse

4) Soit : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

Supposons que : $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$

On a : $\left|\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right|\leq\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ c'est-à-dire : $|a|\leq\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ et comme : $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$

Alors : $|a|\prec c$

On a aussi : $\left|\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\right|\leq\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{b-a}{2}\right|$ c'est-à-dire : $|b|\leq\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ car $|a-b|=|b-a|$ et comme :

$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$ alors $|b|\prec c$

Conclusion : $(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3):\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\Rightarrow |a|\prec c\ et\ |b|\prec c$

Exercice4 : On considère la proposition suivante :

$P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):\ x^2=y^2\Rightarrow x=y$

Ecrire la négation de la proposition P et déterminer sa valeur de vérité

Solution : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/\ x^2=y^2\ \ et\ \ x\neq y$

Pour : $x=-1\ et\ y=1$: $(-1)^2=1^2\ \ et\ \ -1\neq 1$

La proposition $\overline{P}$: est vraie alors : La proposition P est fausse

Exercice5 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|\le\frac{1}{2}x^2$.

Solution : 1) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1^2-\sqrt{x^2+1}^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{1-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}^2}=\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|=\left|\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\right|=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Car x^2 et $\sqrt{x^2+1}+x^2+1$ sont positifs

On a : $x^2\ge 0$ donc : $x^2+1\ge 1$ donc : $\sqrt{x^2+1}\ge\sqrt{1}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x^2+1}\ge 1$

De : $\sqrt{x^2+1}\ge 1$ et $x^2+1\ge 1$ par somation on a donc : $\sqrt{x^2+1}+x^2+1\ge 2$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\le\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\le\frac{1}{2}x^2$

D'où : $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|\le\frac{1}{2}x^2$

Exercice6 : 1) Montrer que : $|x-1|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{2}{3}$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x\ne\sqrt{5}$ et $x\ne-\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{4+x^2}}\ne 1$

Solution : 1) $|x-1|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le x-1\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}+1\le x-1+1\le\frac{1}{2}+1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+1\le x+1\le\frac{3}{2}+1\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le x+1\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{2}{3}$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$ $|x-1|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{2}{3}$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{3}{\sqrt{4+x^2}}=1\Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$

$$\frac{3}{\sqrt{4+x^2}}=1\Leftrightarrow\sqrt{4+x^2}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2=3^2\Leftrightarrow 4+x^2=9\Leftrightarrow x^2=5\Leftrightarrow x=\sqrt{5}\ ou\ x=-\sqrt{5}$$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$ $x\ne\sqrt{5}$ et $x\ne-\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{4+x^2}}\ne 1$

Exercice7 : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Montrer que : $|2x^2+5xy+3y^2|\le 3\Rightarrow|x+y|\le\sqrt{3}$ ou $|2x+3y|\le\sqrt{3}$

Solution : Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $|x+y|\succ\sqrt{3}$ et $|2x+3y|\succ\sqrt{3}\Rightarrow|2x^2+5xy+3y^2|\succ 3$

$|x+y|\succ\sqrt{3}$ et $|2x+3y|\succ\sqrt{3}\Rightarrow|2x+3y||x+y|\succ\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$\Rightarrow|(2x+3y)(x+y)|\succ 3$

$$\Rightarrow \left|2x^2+3xy+2xy+3y^2\right| \succ 3$$

$$\Rightarrow \left|2x^2+5xy+3y^2\right| \succ 3$$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 \quad |x+y| \succ \sqrt{3} \;\; et \;\; |2x+3y| \succ \sqrt{3} \Rightarrow \left|2x^2+5xy+3y^2\right| \succ 3$

Alors : Par contraposition : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\left|2x^2+5xy+3y^2\right| \le 3 \Rightarrow |x+y| \le \sqrt{3} \;\; ou \;\; |2x+3y| \le \sqrt{3}$

Exercice8 : 1) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): |a+b| \le |a|+|b|$

2)Montrer que : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right)\left(\forall y\in[1;+\infty[\right): \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \le \sqrt{xy}$

Solution : 1) Montrons que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): |a+b| \le |a|+|b|$ (l'inégalité triangulaire)

Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$|a+b| \le |a|+|b| \Leftrightarrow |a+b|^2 \le \left(|a|+|b|\right)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 \le |a|^2+|b|^2+2|a|\times|b|$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \le a^2+b^2+2|a|\times|b|$ car $|X|^2 = X^2$

$\Leftrightarrow 2ab \le 2|a|\times|b| \Leftrightarrow ab \le |ab|$ Comme $ab \le |ab|$ est une proposition vraie : $X \le |X|$

Alors $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): |a+b| \le |a|+|b|$ est aussi vraie

2)Soit : $(x;y)\in\left([1;+\infty[\right)^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \le \sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2 \le \sqrt{xy}^2$

$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}+y-1 \le xy \Leftrightarrow x-1+2\sqrt{xy-x-y+1}+y-1 \le xy$

$\Leftrightarrow 0 \le xy-x-y+1-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{xy-x-y+1}^2-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \le \sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{xy-x-y+1}-1\right)^2 \ge 0$ est une proposition vraie

Donc : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right)\left(\forall y\in[1;+\infty[\right): \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \le \sqrt{xy}$

Exercice9 : Soient : $x\in\mathbb{R}^+ \;\; et \;\; y\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x+y=1$

1)Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): a^2+b^2 \ge 2ab$

2) a) Montrer que : $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1}=\dfrac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

b) Montrer que : $1-xy \ge \dfrac{3}{4}$

c) Montrer que : $\dfrac{1}{(x+1)(y+1)} \ge \dfrac{4}{9}$

3)Déduire que :si $x\in\mathbb{R}^+ \;\; et \;\; y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$ alors $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1} \ge \dfrac{1}{3}$

Solution : Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

$a^2+b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right): a^2+b^2 \ge 2ab$ est aussi une Proposition vraie

2) a) Montrons que : $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1}=\dfrac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

Soient : $x\in\mathbb{R}^+ \;\; et \;\; y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{x^2(y+1)+y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)}=\frac{x^2y+x^2+y^2x+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{x^2y+y^2x+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}$$

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}$$

Comme : $x+y=1 \Rightarrow (x+y)^2=1 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=1 \Rightarrow x^2+y^2=1-2xy$

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{xy(x+y)+x^2+y^2}{(x+1)(y+1)}=\frac{xy\times 1+1-2xy}{(x+1)(y+1)}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$$

b) Montrons que : $1-xy\geq\frac{3}{4}$

On a : $(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2): a^2+b^2\geq 2ab$ donc : $x^2+y^2\geq 2xy$ et $x^2+y^2=1-2xy$

Alors : $1-2xy\geq 2xy \Rightarrow 1\geq 4xy \Rightarrow xy\leq\frac{1}{4} \Rightarrow -xy\geq-\frac{1}{4} \Rightarrow 1-xy\geq 1-\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{1-xy\geq\frac{3}{4}}$

c) Montrons que : $\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}$

Comme : $x+y=1 \Rightarrow x+1+y+1=1+1+1 \Rightarrow (x+1)+(y+1)=3$

$\Rightarrow [(x+1)+(y+1)]^2=9 \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+2(x+1)(y+1)=9$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=9-2(x+1)(y+1) \Rightarrow 9-2(x+1)(y+1)\geq 2(x+1)(y+1)$

$\Rightarrow 9\geq 4(x+1)(y+1) \Rightarrow (x+1)(y+1)\leq\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9}$

3)Déduisons que :si $x\in\mathbb{R}^+$ *et* $y\in\mathbb{R}^+$ et $x+y=1$ alors $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}$

On a : $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}=(1-xy)\frac{1}{(x+1)(y+1)}$

$1-xy\geq\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{4}{9} \Rightarrow (1-xy)\frac{1}{(x+1)(y+1)}\geq\frac{3}{4}\times\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}$

Exercice10 : $x\ ;\ y\in\mathbb{R}$: Montrer que : $x\notin\mathbb{Q}\Rightarrow x+1\notin\mathbb{Q}$

Solution : *Pour* démontrer la véracité d'une implication :
P ⇒ Q on peut procéder de deux manières :
(1) Par déduction : on détermine une assertion R telle que : P ⇒ R et R ⇒ Q. (avec possibilité d'enchaîner plusieurs assertions intermédiaires)
(2) Par contraposée : on établit non(Q) ⇒ non(P)
On va procéder Par contraposée :
Montrons : $x+1\in\mathbb{Q}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$.
Supposons $x+1\in\mathbb{Q}$.
Puisque : $x=(x+1)-1$ et on a $x+1\in\mathbb{Q}$ et $1\in\mathbb{Q}$
Donc : $x\in\mathbb{Q}$.

Exercice11 : Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$\sqrt{2}=\frac{a}{b} \Rightarrow a=b\sqrt{2} \Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a^2=2b^2 \Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair

$\Rightarrow a=2k$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $a^2=2b^2 \Rightarrow 4k^2=2b^2 \Rightarrow 2k^2=b^2$

$\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice12 : $x\in\mathbb{R}; y\in\mathbb{R}$

1) Montrer que : $x\neq y \Rightarrow (x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$;
n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Montrer que : $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

4) Montrer que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$;

5) Montrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

Solution :1) Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow xy-x+y-1=xy+x-y-1$

$\Rightarrow -2x=-2y\Rightarrow x=y$

Alors : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$

Donc : par contraposition : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$;
n^2 Est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

Soit : $n\in\mathbb{N}$

Par contraposée montrons que :

n n'est pas un multiple de 3 $\Rightarrow$ n^2 n'est pas un multiple de 3 :

On suppose que n n'est pas un multiple de 3.

On a 2 cas possibles seulement pour n :

$n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

<u>1ére cas :</u> $n=3k+1$ alors $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\times\left(3k^2+2k\right)+1=3k'+1$

Avec : $k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2 n'est pas un multiple de 3 :

<u>2ére cas :</u> $n=3k+2$ alors $n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3\times\left(3k^2+4k+1\right)+1=3k'+1$

Avec : $k'=3k^2+4k+1\in\mathbb{N}$

Donc : n^2 n'est pas un multiple de 3

On conclut que dans les deux cas n^2 n'est pas un multiple de 3: Ceci signifie que :
n n'est pas un multiple de 3 $\Rightarrow$ n^2 n'est pas un multiple de 3 :

D'où par contraposée
n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$

Donc : il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ En Elevant légalité au carré nous obtenons : $a=b\sqrt{3} \Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{3}\right)^2$

$\Rightarrow a^2=3b^2 \Rightarrow$ 3 divise a^2 $\Rightarrow$(D'après ce qui précède) $a=3k$ ① avec $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $a^2=3b^2 \Rightarrow 9k^2=3b^2 \Rightarrow 3k^2=b^2 \Rightarrow b^2$ est un multiple de 3 $\Rightarrow b$ est un multiple de 3②
(D'après ce qui précède)

Donc on a : 3 divise a et b Cad : $a\wedge b\neq 1$

Nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse : $a\wedge b=1$.

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

4) Montrons que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$;

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$

Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que : $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$\sqrt{6}=\frac{a}{b} \Rightarrow a=b\sqrt{6} \Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow a^2=6b^2 \Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair $\Rightarrow a=2k$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $a^2=6b^2 \Rightarrow 4k^2=2b^2 \Rightarrow 2k^2=b^2 \Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$

5) Montrons que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$;

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\in\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}^2\in\mathbb{Q} \Rightarrow 5+2\sqrt{6}\in\mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{6}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{6}\in\mathbb{Q}$$

Nous obtenons une contradiction car $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$

Donc notre supposition est fausse donc : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Exercice13 : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$: On pose : $U_n=n4^{n+1}-(n+1)4^n+1$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3\left(4^{n+1}-1\right)$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre : $\alpha_n=4^{n+1}-1$ est divisible par 3

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3\left(4^{n+1}-1\right)$

Soit : $n\in\mathbb{N}$ On a : $U_{n+1}=n4^{n+2}-(n+2)4^{n+1}+1$

$$4U_n+3\left(4^{n+1}-1\right)=4\left(n4^{n+1}-(n+1)4^n+1\right)+3\left(4^{n+1}-1\right)=4n4^{n+1}-4(n+1)4^n+4+3\times4^{n+1}-3$$

$$=n4^{n+2}-(n+1)4^{n+1}+3\times4^{n+1}+1=n4^{n+2}+(-n-1+3)4^{n+1}+1=n4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1$$

$$=(n+1-1)4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-4^{n+2}+(2-n)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-4\times4^{n+1}+(2-n)4^{n+1}+1$$

$$=(n+1)4^{n+2}+(2-n-4)4^{n+1}+1=(n+1)4^{n+2}-(2+n)4^{n+1}+1$$

Donc : $4U_n+3\left(4^{n+1}-1\right)=n4^{n+2}-(n+2)4^{n+1}+1=U_{n+1}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=4U_n+3\left(4^{n+1}-1\right)$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; le nombre $\alpha_n=4^{n+1}-1$ est divisible par 3

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $\alpha_0=4^{0+1}-1=4-1=3=3\times1$ et $2n+3=2\times0+3=3$

Le nombre α_0 est divisible par 3

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/\ \alpha_n=4^{n+1}-1=3k$

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/\ 4^{n+1}=3k+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / \alpha_{n+1} = 4^{n+2} - 1 = 3k'$

$\alpha_{n+1} = 4^{n+2} - 1 = 4^{n+1} \times 4 - 1 = (3k+1) \times 4 - 1$

$\alpha_{n+1} = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1) = 3k'$ avec $k' = 4k + 1 \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$; le nombre $\alpha_n = 4^{n+1} - 1$ est divisible par 3

3) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $U_0 = 0 \times 4^{0+1} - (0+1)4^0 + 1 = -1 + 1 = 0$ et 9divise 0

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / U_n = 9k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'' \in \mathbb{N} / U_{n+1} = 9k''$??

On a : $U_{n+1} = 4U_n + 3(4^{n+1} - 1)$ et $\exists k \in \mathbb{N} / U_n = 9k$ et on a aussi : $\exists k' \in \mathbb{N} / \alpha_n = 4^{n+1} - 1 = 3k'$

Donc : $U_{n+1} = 4 \times 9k + 3 \times 3k' = 9(4k + k') = 9k''$ avec $k'' = 4k + k' \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

Exercice14 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} k^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}.$$

Solution : Notons P(n) la proposition : "$S_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=1} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{1-1} 1^2 = 1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2}(-1)^{1+1} = 1 \times (-1)^2 = 1$$

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n+1} (-1)^{k-1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$??

Remarque : $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n \times 1 = (-1)^n$ et

On a : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n+1} (-1)^{k-1} k^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^n (n+1)^2 = S_n + (-1)^n (n+1)^2$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

Donc : $S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1} + (-1)^n (n+1)^2 = \frac{1}{2}\left(-n(n+1)(-1)^n + 2(-1)^n (n+1)^2\right)$

Car : $(-1)^{n+1} = (-1)^n \times (-1)^1 = -(-1)^n$

Donc : $S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)(-1)^n\left(-n+2(n+1)\right)=\frac{1}{2}(-1)^n(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Exercice15 : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: On pose : $P_n=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$

1)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $P_n=\frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

2) a) vérifier que : $(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$

b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $P_n=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$

Solution : 1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $P_n=\frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

$$P_n=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}\times\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}\times\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

Il suffit de montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$; (E_n) "$\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$"

1étapes : l'initialisation : Pour n=2 nous avons $\prod_{k=2}^{k=2}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{2(2+1)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Par suite (E_2) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Supposons que (E_n) soit vraie c'est-à-dire : $\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$

3étapes : Nous allons montrer que (E_{n+1}) est vraie.

Montrons alors que : $\prod_{k=2}^{k=n+1}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$?

$$\prod_{k=2}^{k=n+1}\frac{k-1}{k+1}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}\times\frac{n+1-1}{n+1+1}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}\times\frac{n}{n+2}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$

Donc : $\prod_{k=2}^{k=n+1}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n}{n+2}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$ c'est-à-dire : (E_{n+1}) est vraie.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$.

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \displaystyle\prod_{k=2}^{k=n} \dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

2) a) Vérifions que : $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$

$(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 1 = k^2 + k + 1$

b) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$

C'est-à-dire : Montrons que : $\dfrac{2}{n(n+1)} \displaystyle\prod_{k=2}^{k=n} \dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$?

C'est-à-dire : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n} \dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \dfrac{n^2+n+1}{3}$?

1étapes : l'initialisation : Pour n=2 nous avons $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=2} \dfrac{2^2+2+1}{2^2-2+1} = \dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{2^2+2+1}{3} = \dfrac{7}{3}$

Par suite la propriété est vraie pour n=2

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

Supposons que : $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n} \dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \dfrac{n^2+n+1}{3}$

Montrons alors que : $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n+1} \dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \dfrac{(n+1)^2+n+1+1}{3} = \dfrac{n^2+3n+3}{3}$?

$$\prod_{k=2}^{k=n+1} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} \times \frac{(n+1)^2+n+1+1}{(n+1)^2-n-1+1} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} \times \frac{n^2+2n+1+n+1+1}{n^2+2n+1-n-1+1}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n} \dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \dfrac{n^2+n+1}{3}$

Donc : $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n+1} \dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \dfrac{n^2+n+1}{3} \times \dfrac{n^2+3n+3}{n^2+n+1} = \dfrac{n^2+3n+3}{3}$

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$

Exercice16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_2): $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \le 0$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation : (I_2): $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \le 0$

$D_2 = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \ge 0\} = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et S l'ensemble des solutions de (I_2) :

$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \le 2x - 1$

Le tableau de signe de l'expression $2x-1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

1ieme cas : si $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $2x-1 \geq 0$

$\sqrt{x^2+1} \leq 2x-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \leq (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1 \leq 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow -3x^2+4x \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Donc : $S_1 = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\cap \left(\left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[\right) = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

2ieme cas : si $x \in \left[-\infty;\frac{1}{2}\right[$ alors $2x-1 \prec 0$

Donc : $S_2 = \varnothing$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exercice17 : Démontrer que l'équation $9n^5-12n^4+6n-5=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Solution : Par l'absurde, supposons que : tel que

Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que : $9n^5-12n^4+6n-5=0$

ce que l'on réécrit en : $n\left(9n^4-12n^3+6\right)=5$

Ainsi, n est un diviseur de 5. Or, les seuls diviseurs de 5 sont :-5 ;-1 ;1 ; 5

et on vérifie aisément par un calcul direct qu'aucun de ces nombres n'est solution de l'équation.

Ainsi, l'hypothèse formulée était fausse, et l'équation n'admet pas de solutions entières.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien