1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Série N°9 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P"\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 = 0"$
2) $Q"\forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 = 0"$
3) $R"(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) / x + y = 3"$
4) $S"(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x + y = 3"$

Exercice2 : Donner la négation de chacune des propositions suivantes.

$\overline{P} \wedge Q$; $\overline{P} \vee Q$; $P \vee (Q \wedge R)$; $P \wedge (Q \wedge R)$; $P \Rightarrow \overline{Q}$; $P \Leftrightarrow Q$

Exercice3 : On considère les propositions suivantes :

$P : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : xy + 2y + x + 2 = 0$ et $Q : (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sqrt{n(n+1)+1} \in \mathbb{N}$

$R : (\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}) : \left[\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| \prec c \Rightarrow |a| \prec c \text{ et } |b| \prec c \right]$

1) Déterminer la valeur de vérité de P
2) Ecrire la négation des propositions P et Q et R
3) Montrer que la proposition Q est fausse
4) Montrer que la proposition R est vraie

Exercice4 : On considère la proposition suivante :

$P : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

Ecrire la négation de la proposition P et déterminer sa valeur de vérité

Exercice5 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right| \leq \frac{1}{2}x^2$.

Exercice6 : 1) Montrer que : $|x-1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $x \neq \sqrt{5}$ et $x \neq -\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{4+x^2}} \neq 1$

Exercice7 : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: Montrer que : $|2x^2 + 5xy + 3y^2| \leq 3 \Rightarrow |x+y| \leq \sqrt{3}$ ou $|2x+3y| \leq \sqrt{3}$

Exercice8 : 1) Montrer que : $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : |a+b| \leq |a| + |b|$

2)Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[)(\forall y \in [1;+\infty[) : \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$

Exercice9 : Soient : $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ tel que : $x + y = 1$

1)Montrer que : $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 \geq 2ab$

2) a) Montrer que : $\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} = \frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}$

b) Montrer que : $1 - xy \geq \frac{3}{4}$

c) Montrer que : $\frac{1}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{4}{9}$

3)Déduire que :si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ et $x + y = 1$ alors $\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} \geq \frac{1}{3}$

Exercice10 : x ; $y \in \mathbb{R}$: Montrer que : $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + 1 \notin \mathbb{Q}$

Exercice11 : Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice12 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

1) Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;
n^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ n est un multiple de 3

3) Montrer que : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$;

4) Montrer que : $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$;

5) Montrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$;

Exercice13 : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$: On pose : $U_n = n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = 4U_n + 3\left(4^{n+1} - 1\right)$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; le nombre : $\alpha_n = 4^{n+1} - 1$ est divisible par 3

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; le nombre U_n est divisible par 9

Exercice14 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} k^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}.$$

Exercice15 : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: On pose : $P_n = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

1)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

2) a) vérifier que : $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$

b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $P_n = \frac{2\left(n^2+n+1\right)}{3n(n+1)}$

Exercice16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_2): $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0$

Exercice17 : Démontrer que l'équation $9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien