1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°8 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la négation des propositions suivantes et dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

1) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left(x^2\prec x\right)\ ou\ \left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$ 2) $Q:$ « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{Q});x=y\ ou\ x\succ y$ »

3) $R:$ « $(\exists y\in\mathbb{Q})(\forall x\in\mathbb{R});x=y\ ou\ x\succ y$ 4) $S:(\exists!x\in\mathbb{R});x^2-3x+2=0$

5) $T:\left(\forall x\in\mathbb{N}^*\right):x\neq 1\Rightarrow x\geq 2$

Solution :1) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left(x^2\prec x\right)\ ou\ \left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$

$\overline{P}:\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left[\left(x^2\geq x\right)\ et\ \left(x+\frac{1}{x}\geq 0\right)\right]$ Est fausse : car $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left(x^2\geq x\right)$ est fausse :

En effet : $\left(\exists x=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}_+^*\right)$: $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$

2) $Q:$ « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{Q});x=y\ ou\ x\succ y$ »

Soit : $x\in\mathbb{R}$: on peut toujours trouver $y\in\mathbb{Q}$ tel que : $x\succ y$ il suffit de prendre : $y=E(x)-1$ et on a bien : $y=E(x)-1\prec x$ par suite : Q :est vraie

$\overline{Q}:$ « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{Q});x\neq y\ et\ x\leq y$ »

3) $R:$ « $(\exists y\in\mathbb{Q})(\forall x\in\mathbb{R});x=y\ ou\ x\succ y$

$\overline{R}:$ « $(\forall y\in\mathbb{Q})(\exists x\in\mathbb{R});x\neq y\ et\ x\leq y$

Soit : $y\in\mathbb{Q}$: on peut toujours trouver $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x\neq y\ et\ x\leq y$ il suffit de prendre : $x=y-1$ et on a bien : $x\neq y\ et\ x\leq y$ Alors : $\overline{R}$:est vraie

Par suite : R :est fausse

4) $S:(\exists!x\in\mathbb{R});x^2-3x+2=0$

$x^2-3x+2=0\Rightarrow\Delta=9-8=1\succ 0$: admet donc 2 solutions

Donc : $S:(\exists!x\in\mathbb{R});x^2-3x+2=0$ est fausse

$\overline{S}:(\forall\in\mathbb{R});x^2-3x+2\neq 0\ ou\ \left(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)/\,x\neq y\ et\ x^2-3x+2=y^2-3y+2=0$

5) $T:\left(\forall x\in\mathbb{N}^*\right):x\neq 1\Rightarrow x\geq 2$ et $\overline{T}:\left(\exists x\in\mathbb{N}^*\right):x\neq 1\ et\ \ x\prec 2$: $\overline{T}$:est Faux

Par suite : T :est vraie

Exercice2 : Trouver des propositions P et Q telles que
1)P⟹Q est vrai et Q⟹P est vrai.
2)P⟹Q est faux et Q⟹P est vrai.
3)P⟹Q est faux et Q⟹P est faux.

Solution :1) On peut prendre pour P la proposition "le triangle ABC est rectangle en A" et pour Q la proposition "$BC^2=AB^2+AC^2$".

2)On peut prendre pour P la proposition "ABCD est un rectangle" et pour Q la proposition "ABCD est un carré".

3)On peut prendre pour P la proposition "ABCD est un rectangle" et pour Q la proposition "ABCD est un losange".

Exercice3 : Montrer par Le raisonnement par contre-exemple que les propositions suivantes sont fausses

1) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*}\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$ 2) $Q:\ \left(\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):2x-4y\neq 5\right.$

3) $R:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x-y=1\Rightarrow x\succ 1$

Solution :1) $\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}^{*}\right):x+\frac{1}{x}\prec 2$ est vraie car : $\left(\exists x=-1\in\mathbb{R}^{*}\right):-1+\frac{1}{-1}=-2\prec 2$

Par suite : $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*}\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$ est fausse.

2) $\overline{Q}:\ \left(\left(\exists x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):2x-4y=5\right.$ par exemple on prend : $y=0$ et $x=\frac{5}{2}$: $2\times\frac{5}{2}-4\times 0=5$

Donc : $\overline{Q}$:est vraie Par suite : Q: est fausse.

3) $R:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x-y=1\Rightarrow x\succ 1$

$\overline{R}:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):x-y=1\ et\ x\leq 1$ par exemple on prend : $y=0$ et $x=1$: $x-1=1$ et $1\leq 1$

Donc : $\overline{R}$:est vraie Par suite : R: est fausse.

Exercice4 : Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right):\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}^{+}$

$\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{2x+2}=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+2}\right)^{2}=\left(\sqrt{x}+1\right)^{2}\Leftrightarrow 2x+2=\left(\sqrt{x}\right)^{2}+2\sqrt{x}+1$

$\Leftrightarrow 2x+2=x+2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^{2}-2\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^{2}=1^{2}\Leftrightarrow x=1$

Donc : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right):\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

Exercice5 : 1) (Raisonnement direct) Soient $a\in\mathbb{R}^{+};b\in\mathbb{R}^{+}$

Montrer que si $a\leq b$ alors $a\leq\frac{a+b}{2}\leq b$

2) (Raisonnement par équivalence) Soient $a\in\mathbb{R}^{+};b\in\mathbb{R}^{+}$

Montrer que : $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

3) (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n\in\mathbb{N}$; $n^{3}-n$ est divisible par 3.

Indication : Etudier les cas : $n=3k$; $n=3k+1$ et $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

4) (Absurde) Soit $n\in\mathbb{N}^{*}$ Montrer que $\sqrt{n^{2}+1}$ n'est pas un entier.

5) (Contre-exemple) déterminer la négation et la valeur de vérité de la proposition suivante :

$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^{2}\geq 9\Rightarrow x\geq 3$

6) (Récurrence) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $4^{n}+15n-1$ est divisible par 9

Solution : 1) (Raisonnement direct) Soient : $a\in\mathbb{R}^{+};b\in\mathbb{R}^{+}$

Supposons que : $a\leq b$

Montrons que : $a\leq\frac{a+b}{2}\leq b$

a) $\frac{a+b}{2}-a=\frac{a+b-2a}{2}=\frac{b-a}{2}\geq 0$ car $a\leq b$ donc : $a\leq\frac{a+b}{2}$

b) $b-\frac{a+b}{2}=\frac{2b-a-b}{2}=\frac{b-a}{2}\geq 0$ car $a\leq b$ donc : $\frac{a+b}{2}\leq b$

Conclusion : si $a\leq b$ alors $a\leq\frac{a+b}{2}\leq b$

2) (Raisonnement par équivalence) Soient $a \in \mathbb{R}^+ ; b \in \mathbb{R}^+$

Montrons que : $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ (Proposition vraie)

Donc : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (Proposition vraie)

3) Soit $n \in \mathbb{N}$: $n^3 - n = n\left(n^2-1\right) = n(n-1)(n+1)$

Il y'a trois façons d'écrire n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k \in \mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n=3k$: $n^3 - n = 3k(3k-1)(3k+1) = 3\left(k(3k-1)(3k+1)\right) = 3k'$ avec :

$k' = k(3k-1)(3k+1) \in \mathbb{N}$

Donc : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n=3k+1$: $n^3 - n = (3k+1)(3k+1-1)(3k+1+1)$

$= (3k+1)(3k)(3k+2) = 3\left(k(3k+1)(3k+2)\right) = 3k'$ avec : $k' = k(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}$

Donc : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi

3ére cas : si $n=3k+2$

$n^3 - n = (3k+2)(3k+2-1)(3k+2+1) = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3\left((k+1)(3k+1)(3k+2)\right) = 3k'$

Avec : $k' = (k+1)(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par

Disjonction des cas le nombre $n^3 - n$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrons que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Par l'absurde, supposons que : $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier., donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+1} = m$

Donc : $\exists m \in \mathbb{N} / n^2 + 1 = m^2$

On a : $n^2 \prec n^2 + 1$ et $n^2 + 1 \prec (n+1)^2$ (car $(n+1)^2 - n^2 + 1 = 2n \succ 0$)

C'est-à-dire : $n^2 \prec n^2 + 1 \prec (n+1)^2$

Donc : $n^2 \prec m^2 \prec (n+1)^2$

Par suite : $n \prec m \prec n+1$

C'est-à-dire : il existe un entier naturel strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est contradictoire

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5) $P : "(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 \succ 9 \Rightarrow x \succ 3"$

$\overline{P} : "(\exists x \in \mathbb{R}) ; x^2 \succ 9 \; et \; x \leq 3"$

$\overline{P}$ est une proposition vrais car l'lorsque je prends $(\exists x = -3 \in \mathbb{R})$ tel que : $(-4)^2 \succ 9$ et $-4 \leq 3$

P est une proposition fausse

6)Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n + 15n - 1 = 9k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $4^0 + 15 \times 0 - 1 = 0 = 9 \times 0$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}$

Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n + 15n - 1 = 9k$

Donc $4^n = 9k - 15n + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9k'$??

$$4^{n+1}+15(n+1)-1=4\times4^n+15n+15-1=4\times(9k-15n+1)+15n+14=4\times9k-4\times15n+4+15n+14$$

$$=4\times9k-45n+18=9(4k-5n+2)=9k' \quad \text{avec } k'=4k-5n+2\in\mathbb{N}$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; $4^n+15n-1$ est divisible par 9

Exercice6 : Soient $a\succ0$ et $b\succ0$

Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ et $a\neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$ donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$ Comme $a\neq b$ alors $a-b\neq0$ et donc en divisant par a−b on obtient : a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exercice7 : En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

1) $\left(\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right)\left(y\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right):x\neq y\Rightarrow x^2-3x\neq y^2-3y$

2) Soient $x;y\ et\ z$ trois réels. Montrer que : $x+y\succ z\Rightarrow x\succ\frac{z}{2}\ ou\ y\succ\frac{z}{2}$

3) $[\forall x\in\mathbb{R}:a\prec x\Rightarrow b\prec x]\Rightarrow b\leq a$

4) $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Solution : 1) Soient $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\ et\ y\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

Montrons que : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$

$x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x^2-3x-y^2+3y=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y)-3(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y-3)=0\Rightarrow x-y=0\ ou\ x+y-3=0$

$\Rightarrow x=y\ ou\ x+y=3$ et comme on a : $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\ et\ y\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ alors $x\succ\frac{3}{2}\ et\ x\succ\frac{3}{2}$

Et par suite : $x+y\succ\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\Rightarrow x+y\succ1\Rightarrow x+y\neq1$

$x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$

Par contraposition on a donc : $\left(\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right)\left(y\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right):x\neq y\Rightarrow x^2-3x\neq y^2-3y$

2) Soient $x;y\ et\ z$ trois réels. Montrons que : $x\leq\frac{z}{2}\ et\ y\leq\frac{z}{2}\Rightarrow x+y\leq z$

$x\leq\frac{z}{2}\ et\ y\leq\frac{z}{2}\Rightarrow x+y\leq\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\Rightarrow x+y\leq z$

Par contraposition on a donc : $x+y\succ z\Rightarrow x\succ\frac{z}{2}\ ou\ y\succ\frac{z}{2}$

3) Montrons que : $b\succ a\Rightarrow[\exists x\in\mathbb{R}:a\prec x\ et\ b\geq x]$?

$a\prec b\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}:a\prec x\prec b\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}:a\prec x\quad et\quad x\prec b$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : a \prec x \quad et \quad x \leq b$

Par contraposition on a donc : $\left[\forall x \in \mathbb{R} : a \prec x \Rightarrow b \prec x\right] \Rightarrow b \leq a$

4) Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: Montrons que : $\left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}} \; ou \; y = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} \Rightarrow 2xy2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 = 1$$

$$\Rightarrow 2xy - \sqrt{2}y - \sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow 2y\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2y - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \; ou \; 2y - \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \; ou \; y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par contraposition on a donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $\left(x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \; et \; y \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice8 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}.$$

Solution : notons P(n) La proposition "$\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $\frac{1}{1\times2\times3} = \frac{1}{6}$ et $\frac{1\times(1+3)}{4\times(1+1)\times(1+2)} = \frac{4}{4\times2\times3} = \frac{1}{6}$

Donc $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$. Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)} = \frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$??

$$\left(\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}\right) + \frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)} = \frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

Car d'après l'hypothèse de récurrence on a : $\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}$

$$\left(\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}\right) + \frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)} = \frac{n\times(n+3)^2}{4\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)} + \frac{4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$= \frac{n\times(n+3)^2+4}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)} = \frac{n\times(n^2+6n+9)+4}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)}$ On remarque : -1 est racine du polynôme : n^3+6n^2+9n+4 donc divisible par $n+1$ et par la division euclidienne on trouve que :

$n^3+6n^2+9n+4 = (n+1)\left(n^2+5n+4\right)$

$\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4\times(n+1)\times(n+2)(n+3)}=\frac{n^2+5n+4}{4\times(n+2)(n+3)}$ et on remarque : -1 est racine du polynôme : n^2+5n+4 donc divisible par $n+1$ et par la division euclidienne on trouve que : $n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}.$$

Exercice9 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$ $S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

Solution : Notons P(n) la proposition : " $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $S_0=\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^k a^k=(-1)^0 a^0=1$ et $\frac{a^1+1}{a+1}=1$

Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\frac{a^{2n+3}+1}{a+1}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k+(-1)^{2n+1}a^{2n+1}+(-1)^{2n+2}a^{2n+2}$

Remarque : $(-1)^{2n+2}=1$ car $2n+2$ pair et $(-1)^{2n+1}=-1$ car $2n+1$ impair

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}-a^{2n+1}+a^{2n+2}=\frac{a^{2n+1}+1-a^{2n+1}(a+1)+a^{2n+2}(a+1)}{a+1}$

$$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1-a^{2n+2}-a^{2n+1}+a^{2n+3}+a^{2n+2}}{a+1}=\frac{a^{2n+3}+1}{a+1}$$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$

$$S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}.$$

Exercice10 : Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $Max(x;y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}$

Solution : Remarque : Raisonnement par Disjonction des cas.

Pour montrer l'implication :

« (P_1 ou P_2 ou ⋯ ou P_n) ⇒Q »,

On montre successivement les différentes implications « P_k ⇒Q », pour chaque k ∈ [[1 ; n]].

On sépare en deux cas, selon que : $x\geq y$ ou $x\prec y$

Donc : 2cas possibles.

<u>1cas :</u> si : $x \geq y$

On a alors : $Max(x;y) = x$ et $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x$

Donc : si : $x \geq y$; $Max(x;y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

<u>2cas :</u> si : $x \prec y$

On a alors : $Max(x;y) = y$ et $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y$

Donc : si : $x \prec y$; $Max(x;y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

Finalement, par disjonction de cas :

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $Max(x;y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

Exercice11 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x|x-1|-|x-2|=0$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I) $\sqrt{x-1}-\sqrt{11-x} \geq 2$

Solution :1) $2x|x-1|-|x-2|=0$

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$x-1$	$-$ 0	$-$	$+$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$

On va Opérer par disjonction de cas :
D'après ce tableau on a trois possibilités

Si $x \prec 1$ alors : l'équation devient : $2x(-x+1)-(-x+2)=0$

Signifie : $-2x^2+3x-2=0$: Calculons le discriminant de l'équation : $\Delta = b^2-4ac = 9-16 = -7 \prec 0$

Donc : $S_1 = \varnothing$

Si $1 \prec x \leq 2$ alors : l'équation devient : $2x(x-1)-(-x+2)=0$ qui signifie que: $2x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation : $\Delta = b^2-4ac = 1+16 = 17 \succ 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$

Seulement x_1 vérifie : $1 \prec x \leq 2$ Donc : $S_2 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Si $x \succ 2$ alors l'équation devient : $2x(x-1)-(x-2)=0$ qui signifie que: $2x^2-3x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$ de l'équation : $\Delta = b^2-4ac = -7 \prec 0$

Comme $\Delta \prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions.

Donc : $S_3 = \varnothing$ par suite : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$

2) On va Opérer par disjonction de cas :
On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation :

$D = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0 \ \ et \ \ 11-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \ \ et \ \ x \leq 11\} = [1,11]$

Soit : $x \in [1,11]$ et S l'ensemble des solutions de (I)

1 cas : si $\sqrt{x-1}-\sqrt{11-x}\leq 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\leq\sqrt{11-x} \Leftrightarrow x-1\leq 11-x$

$\Leftrightarrow 2x\leq 12 \Leftrightarrow x\leq 6$ et $x\in[1,11] \Leftrightarrow x\in[1;6]$

Donc : l'Inéquation n'admet pas de solution c'est-à-dire : $S_1=\varnothing$

2 cas : si alors $\sqrt{x-1}-\sqrt{11-x}\succ 0 \quad \Leftrightarrow x\in\left]6;11\right[$

$x\in S_2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-\sqrt{11-x}\geq 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{11-x}\right)^2 \succ (2)^2 \Leftrightarrow x-1+11-x-2\sqrt{(x-1)(11-x)}\succ 4$

$\Leftrightarrow 10-2\sqrt{(x-1)(11-x)}\succ 4 \Leftrightarrow 6\succ 2\sqrt{(x-1)(11-x)} \Leftrightarrow 3\succ\sqrt{(x-1)(11-x)}$

$\Leftrightarrow 3\succ\sqrt{-x^2+11x-11+x} \Leftrightarrow 3\succ\sqrt{-x^2+12x-11} \Leftrightarrow 9\succ -x^2+12x-11 \Leftrightarrow x^2-12x+20\succ 0$

$\Delta=12^2-4\times 20=144-80=64\succ 0$

Donc : $x_1=\dfrac{12-\sqrt{64}}{2}=\dfrac{12-8}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{12+\sqrt{64}}{2}=\dfrac{12+8}{2}=10$

$x\in S_2 \Leftrightarrow x^2-12x+20\succ 0 \Leftrightarrow x\in\left(\left]1;2\right[\cup\left]10;11\right[\right)\cap\left]6;11\right[=\left]10;11\right[$

Donc $S_2=\left]10;11\right[$

Donc : $S=\varnothing\cup\left]10;11\right[=\left]10;11\right[$

Exercice12 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}: \dfrac{n+5}{n+4}\neq 1$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{n+5}{n+4}=1$

$\dfrac{n+5}{n+4}=1 \Leftrightarrow n+5=n+4 \Rightarrow 5=4$! C'est une contradiction car on sait que : $5\neq 4$

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}: \dfrac{n+5}{n+4}\neq 1$

Exercice13 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{9n^2+13n+5}\notin\mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{9n^2+13n+5}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{9n^2+13n+5}=m$

$\sqrt{9n^2+13n+5}=m \Leftrightarrow 9n^2+13n+5=m^2 \Leftrightarrow (3n)^2+2\times 3n\times 2+2^2+n+1=m^2 \Leftrightarrow (3n+2)^2+n+1=m^2$

Donc : $(3n+2)^2<m^2$ et comme : $(3n+3)^2=9n^2+18n+9$

Alors : $(3n+3)^2-m^2=\left(9n^2+18n+9\right)-\left(9n^2+13n+5\right)=5n+4\succ 0$

On a alors : $(3n+2)^2<m^2<(3n+3)^2$ c'est-à-dire : $3n+2<m<3n+3$

C'est-à-dire : $3n+2<m<(3n+2)+1$ et $m\in\mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $3n+2 \;\; et \;\; 3n+3$

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{9n^2+13n+5}\notin\mathbb{N}$

Exercice14 : (Raisonnement par disjonction des cas)

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(I)\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\ 9x+(m+2)y=6\end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

On pose : $\Delta=\begin{vmatrix} m+2 & 1\\ 9 & m+2\end{vmatrix}$ et $\Delta_x=\begin{vmatrix} m+1 & 1\\ 6 & m+2\end{vmatrix}$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} m+2 & m+1\\ 9 & 6\end{vmatrix}$

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-1)(m+5)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles : $\Delta=0$

2) Vérifier que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

3) On suppose que : $m\neq 1$ et $m\neq -5$

a) Montrer que le système (I) admet un couple unique comme solution.

b) Résoudre le système (I) avec simplification des résultats.

c) En déduire la résolution du système : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (3).

b) Quel est le nombre de solution du système (3).

c) Résoudre le système (3)

5) On suppose que : $m=-5$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (4).

b) Quel est le nombre de solution du système (4).

c) Résoudre le système (4)

Solution : 1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix}m+2 & 1\\ 9 & m+2\end{vmatrix}=(m+2)\times(m+2)-9\times 1=(m+2)^2-3^2=(m+2-3)(m+2+3)=(m-1)(m+5)$$

b) $\Delta=0$ Signifie que : $(m-1)(m+5)=0$ Signifie que : $m-1=0$ ou $m+5=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=1$ ou $m=-5$

2) Vérifions que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\ 6 & m+2\end{vmatrix}=(2+m)(1+m)-6=m^2+2m+m+2-6=m^2+3m-4$$: a = 1, b = 3 ; c = -4

Le discriminent est : $b^2-4ac=3^2+16=25>0$

Donc : $m_1=\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2a}=\dfrac{-3-5}{2\times 1}=\dfrac{-8}{2}=-4$ et $m_2=\dfrac{-3+\sqrt{25}}{2a}=\dfrac{-3+5}{2\times 1}=\dfrac{2}{2}=1$

Donc : $\Delta_x=m^2+3m-4=1(m-(-4))(m-1)=(m+4)(m-1)$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}m+2 & m+1\\ 9 & 6\end{vmatrix}=6(2+m)-9(1+m)=12+6m-9m-9=3-3m=-3(m-1)$$

3) On suppose que : $m\neq 1$ et $m\neq -5$

Dans ce *cas* : $\Delta\neq 0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{(m-1)(m+4)}{(m-1)(m+5)}=\dfrac{m+4}{m+5}$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-3(m-1)}{(m-1)(m+5)}=-\dfrac{3}{m+5}$

Donc : $S=\left\{\left(\dfrac{m+4}{m+5};-\dfrac{3}{m+5}\right)\right\}$

c) Déduction de la résolution du système : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

On pose : $m=-3$ dans : $(I)\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$ on obtient : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

Et puisque: $-3\neq 1$ et $-3\neq -5$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{-3+4}{-3+5};-\frac{3}{-3+5}\right)\right\}$ c'est-à-dire : $S=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)\right\}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecriture du système dans ce cas, on le note (3) :

Si $m=1$ alors $\Delta=0$

On remplace m par 1 dans $\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$: on trouve : $(3)\begin{cases}3x+y=2\\9x+3y=6\end{cases}$

Qui est équivalent à : $(3)\begin{cases}3x+y=2\\3x+y=2\end{cases}$ qui est équivalent à (3): $3x+y=2$

b) Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation (3): $3x+y=2$

Ce système a une infinité de solutions

c) $3x+y=2$ est équivalent a : $y=2-3x$ Alors on a : $S=\{(x;2-3x)/x\in\mathbb{R}\}$

5) On suppose que : $m=-5$

a) Si $m=-5$ alors $\Delta=0$

On remplace m par -5 dans $\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$ on trouve : $\begin{cases}-3x+y=-4\\9x-3y=6\end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases}3x-y=4\\3x-y=2\end{cases}$

b) $(3)\begin{cases}3x-y=4\\3x-y=2\end{cases}$ impossible donc : Ce système n'a pas de solutions

c) $S=\varnothing$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien