1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Série N°8 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/)

Exercice1 : Donner la négation des propositions suivantes et dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

1) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}_+^*\right):\left(x^2\prec x\right)\ ou\ \left(x+\frac{1}{x}\prec 0\right)$

2) $Q:$ « $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{Q}\right);x=y\ ou\ x\succ y$ »

3) $R:$ « $\left(\exists y\in\mathbb{Q}\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x=y\ ou\ x\succ y$

4) $S:\left(\exists! x\in\mathbb{R}\right);x^2-3x+2=0$

5) $T:\left(\forall x\in\mathbb{N}^*\right):x\neq 1\Rightarrow x\geq 2$

Exercice2 : Trouver des propositions P et Q telles que

1)P⟹Q est vrai et Q⟹P est vrai.

2)P⟹Q est faux et Q⟹P est vrai.

3)P⟹Q est faux et Q⟹P est faux.

Exercice3 : Montrer par Le raisonnement par contre-exemple que les propositions suivantes sont fausses

1) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$

2) $Q:\ \left(\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):2x-4y\neq 5\right.$

3) $R:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x-y=1\Rightarrow x\succ 1$

Exercice4 : Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right):\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

Exercice5 : 1) (Raisonnement direct) Soient $a\in\mathbb{R}^+;b\in\mathbb{R}^+$

Montrer que si $a\leq b$ alors $a\leq\frac{a+b}{2}\leq b$

2) (Raisonnement par équivalence) Soient $a\in\mathbb{R}^+;b\in\mathbb{R}^+$

Montrer que : $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

3) (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3.

Indication : Etudier les cas : $n=3k$; $n=3k+1$ et $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

4) (Absurde) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5) (Contre-exemple) déterminer la négation et la valeur de vérité de la proposition suivante :

$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^2\geq 9\Rightarrow x\geq 3$

6) (Récurrence) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $4^n+15n-1$ est divisible par 9

Exercice6 : Soient $a\succ 0$ et $b\succ 0$

Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exercice7 : En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

1) $\left(\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right)\left(y\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right):x\neq y\Rightarrow x^2-3x\neq y^2-3y$

2) Soient $x;y\ et\ z$ trois réels. Montrer que : $x+y\succ z\Rightarrow x\succ\frac{z}{2}\ ou\ y\succ\frac{z}{2}$

3) $\left[\forall x\in\mathbb{R}:a\prec x\Rightarrow b\prec x\right]\Rightarrow b\leq a$

4) $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice8 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}.$$

Exercice9 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall a \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$ $S_n = \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k = \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

Exercice10 : Montrer que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $Max(x;y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

Exercice11 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x|x-1|-|x-2|=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I) $\sqrt{x-1}-\sqrt{11-x}\geq 2$

Exercice12 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{n+5}{n+4} \neq 1$

Exercice13 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt{9n^2+13n+5} \notin \mathbb{N}$

Exercice14 : (Raisonnement par disjonction des cas)

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(I)\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 9 & m+2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-1)(m+5)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles : $\Delta = 0$

2) Vérifier que : $\Delta_x = (m-1)(m+4)$ et $\Delta_y = -3(m-1)$

3) On suppose que : $m \neq 1$ et $m \neq -5$

a) Montrer que le système (I) admet un couple unique comme solution.

b) Résoudre le système (I) avec simplification des résultats.

c) En déduire la résolution du système : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (3).

b) Quel est le nombre de solution du système (3).

c) Résoudre le système (3)

5) On suppose que : $m=-5$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (4).

b) Quel est le nombre de solution du système (4).

c) Résoudre le système (4)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien