1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°7 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P: \ (\exists y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq 10y$

2) $Q: \ (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x + y \succ 2$

3) $R: \ (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x^2 + y \leq xy$

4) $S: \ (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) / x + 2y \leq 1$

5) $T: \ (\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) / a^2 + 2b^2 \succ 4ab$

Solution : 1) $P: \ (\exists y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq 10y$

Il suffit de prendre : $y = 0$ donc : $(\exists y = 0 \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq 10 \times 0$

Donc : P: est une proposition vraie

$\overline{P}: \ (\forall y \in \mathbb{R});(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 \prec 10y$

2) $Q: \ (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x + y \succ 2$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $x + y \succ 2$ signifie que : $y \succ 2 - x$

Il suffit de prendre : $y = -x + 3$

On a alors : $x + y = x + -x + 3 = 3 \succ 2$

Donc : Q est une proposition vraie

$\overline{Q}: \ (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) / x + y \leq 2$

3) $R: \ (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x^2 + y \leq xy$

$\overline{R}: \ (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) / x^2 + y \succ xy$

On prend : $x = 1$ on a donc : $(\forall y \in \mathbb{R}) / 1 + y \succ y$ (vraie)

Donc : $\overline{R}$: est une proposition vraie par suite : R: est une proposition fausse.

4) $S: \ (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) / x + 2y \leq 1$

$\overline{S}: \ (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x + 2y \succ 1$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $x + 2y \succ 1$ signifie que : $y \succ \frac{1}{2}(1 - x)$

Par exemple on prend : $y = \frac{1}{2}(1 - x) + 1$

On a donc : $x + 2y = x + 1 - x + 2 = 3 \succ 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\left(\exists y = \frac{1}{2}(1 - x) + 1 \in \mathbb{R}\right) / x + 2y \succ 1$ vraie

Donc : $\overline{S}$: est une proposition vraie par suite : S est une proposition fausse.

5) $T: \ (\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) / a^2 + 2b^2 \succ 4ab$

Soit : $a \in \mathbb{R}$ (fixe) : $a^2 + 2b^2 \succ 4ab$ signifie que : $2b^2 - 4ab + a^2 \succ 0$ (considérer comme une inéquation du 2 ieme degré avec variable $b \Rightarrow \Delta = 16a^2 - 8a^2 = 8a^2 \geq 0 \Rightarrow$ l'inéquation admet au moins une solution.

(Faire un tableau de signe)

$(\exists b \in \mathbb{R}) / a^2+2b^2 \succ 4ab$ est vraie.

Donc : T est une proposition vraie

Exercice2 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P: (\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}) x \le y \Rightarrow x^2 \le y^2$

2) $Q: (\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[) x \times y = 1 \Rightarrow x = y = 1$

3) $R: (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \ge 1$

Solution : 1) $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

$\overline{P}: (\exists x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}) x \le y \; et \; x^2 \succ y^2$

$(\exists x = -2 \in \mathbb{R});(\exists y = -1 \in \mathbb{R}) -2 \le -1 \; et \; (-2)^2 \succ (-1)^2$

On a : $\overline{P}$ est vraie car par suite : P est une proposition fausse.

2) $Q: (\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[): x \times y = 1 \Rightarrow x = y = 1$

Soit : $(x;y) \in ([1.+\infty[)^2$

Montrons : $x \times y = 1 \Rightarrow x = y = 1$

Supposons : $x \times y = 1$ et Montrons : $x=1$ et $y=1$

Par l'absurde Supposons : $x \neq 1$ ou $y \neq 1$

puisque $(x;y) \in ([1.+\infty[)^2$ alors : $x \succ 1$ ou $y \succ 1$ et donc : $xy \succ 1$ absurde

Donc : $x = y = 1$

Donc : $Q: (\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[): x \times y = 1 \Rightarrow x = y = 1$ est vraie

$\overline{Q}: (\exists x \in [1.+\infty[);(\exists y \in [1.+\infty[): x \times y = 1 \; et (\; x \neq 1 \; ou \; y \neq 1)$

3) $R: (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \ge 1$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x} \ge 0$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow x+1 \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \ge \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x+1} \ge 1$

$\sqrt{x} \ge 0$ et $\sqrt{x+1} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \ge 1+0 \Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \ge 1$

Donc : R est vraie

Exercice3 : Soit $x \in \mathbb{R}$ Montrer que : $|x-1| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{2}{3}$

Solution : Nous raisonnons par équivalence $|x-1| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x-1 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+2 \le x-1+2 \le \frac{1}{2}+2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \le x+1 \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{2}{3}$

Exercice4 : Soient a et b deux réels

Montrer que : $a \in [0;2]$ et $b \in [0;2] \Rightarrow \frac{3}{16}|a-b| \le \left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right| \le \frac{3}{4}|a-b|$

Solution : 1) $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right| = \left|\frac{3(2+b)-3(2+a)}{(2+b)(2+a)}\right| = \left|\frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right| = \left|\frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)}\right| = \left|\frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|}=\frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$ Car : $|b-a|=|a-b|$

Or on a : $a\in[0;2]$ signifie $0\le a\le 2$

Et on a : $b\in[0;2]$ signifie $0\le b\le 2$

Donc : $2\le 2+a\le 4$ et $2\le 2+b\le 4$

Par suite : $4\le(2+b)(2+a)\le 16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)|=(2+b)(2+a)$

Et on a aussi : $\frac{1}{16}\le\frac{1}{(2+b)(2+a)}\le\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16}\le\frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)}\le\frac{3|a-b|}{4}$ car : $3|a-b|\ge 0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

Exercice5 : Soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$; $y\in\mathbb{R}^{*+}$

On pose : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$; $x+y=1$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ (l'inégalité arithmético-géométrique)

b) Déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2a$

2) Montrer que : $A\ge(a+1)^2$

3) Déduire que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge 9$

Solution : : 1) a) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y\ge 2\sqrt{x}\sqrt{y}\Leftrightarrow\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$

2) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

On a : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ et puisque : $\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^{*+}$ et $\frac{1}{y}\in\mathbb{R}^{*+}$ on appliquant cette inégalité

On a donc : $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\ge\sqrt{\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ donc : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2\frac{1}{\sqrt{xy}}$ et comme : $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

Alors : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2a$

2) Montrons que : $A\ge(a+1)^2$

On a : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}$ et comme : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2a$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{xy}$

Donc : $1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}\geq 1+2a+a^2$ c'est-à-dire : $A\geq (a+1)^2$

3) Déduisons que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

On a : $A\geq (a+1)^2$ c'est-à-dire : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq (a+1)^2$

Or on a : $x+y=1$ et $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ donc : $\frac{1}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq 2\Rightarrow a\geq 2$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq (a+1)^2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq (2+1)^2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

Exercice6 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+\quad x\neq 0\Rightarrow\sqrt{x+1}\neq 1+\frac{x}{2}$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Rightarrow x=0$??

Soient : $x\in\mathbb{R}^+$; On a :

$\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Rightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\Rightarrow x+1=1+x+\frac{x^2}{4}$

$\Rightarrow 0=\frac{x^2}{4}\Rightarrow 0=x^2\Rightarrow 0=x$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Rightarrow x=0$

Donc par contraposition on déduit que : $\forall x\in\mathbb{R}^+\ x\neq 0\Rightarrow\sqrt{x+1}\neq 1+\frac{x}{2}$

Exercice7 : Montrer que : $\forall a\in\mathbb{R}^+$

$a^4+8a^3+18a^2+8a\succ 3\Rightarrow a+2\succ\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}$

Solution : Soit $a\in\mathbb{R}^+$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $a+2\leq\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}\Rightarrow a^4+8a^3+18a^2+8a\leq 3$?

$a+2\leq\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}\Rightarrow(a+2)^2\leq\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}^2\Rightarrow a^2+4a+4\leq 3+\sqrt{5-\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a^2+4a+1\leq 1\sqrt{5-\sqrt{2}}\Rightarrow\left(a^2+4a+1\right)^2\leq 1\sqrt{5-\sqrt{2}}^2\Rightarrow a^4+16a+1+8a^3+8a+2a^2\leq 5-\sqrt{2}\leq 3$

Donc : $a+2\leq\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}\Rightarrow a^4+8a^3+18a^2+8a\leq 3$

Alors : Par contraposition : : $\forall a\in\mathbb{R}^+\quad a^4+8a^3+18a^2+8a\succ 3\Rightarrow a+2\succ\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}$

Exercice8 : Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous La forme de proposition mathématiques (écrites avec les symboles “∀”, “et”, “ou”, “⇒”, “⇔”) et les prouver.

1) Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2) Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3)Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4) Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

Solution :1) Oui : $P:\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2:\ n\ ,m\ pairs\Rightarrow n\times m\ pair$

Démonstration : Soient $(n;m)\in\mathbb{N}^2$

$n\ ,m\ pairs\Rightarrow\exists k\in\mathbb{N}/n=2k\ \ et\ \ \exists k'\in\mathbb{N}/m=2k'$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ ; \exists k' \in \mathbb{N} / n \times m = 2k \times 2k'$

$\Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{N} / n \times m = 2k''$ avec : $k'' = 2k\,k' \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n \times m\ pair$

2) Oui : $Q : \forall (n;m) \in \mathbb{N}^2 :\ n\ ,m\, impairs \Rightarrow n \times m\ \ impair$

Démonstration : Soient $(n;m) \in \mathbb{N}^2$

$n\ ,m\ \ impairs \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k+1\ \ et\ \ \exists k' \in \mathbb{N} / m = 2k'+1$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ ; \exists k' \in \mathbb{N} / n \times m = (2k+1) \times (2k'+1) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ ; \exists k' \in \mathbb{N} / n \times m = 4kk' + 2k + 2k' + 1$

$\Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{N} / n \times m = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2k'' + 1$ avec : $k'' = 2kk' + k + k' \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n \times m\ \ impair$

3)Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair

$R : \forall (n;m) \in \mathbb{N}^2 :\ n\ pair\ \ et\ \ m\ impair \Rightarrow n \times m\ \ \ pair$

Démonstration : Soient $(n;m) \in \mathbb{N}^2$

$n\ \ pair\ \ et\ \ m\ impair \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k\ \ et\ \ \exists k' \in \mathbb{N} / m = 2k'+1$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ ; \exists k' \in \mathbb{N} / n \times m = 2k \times (2k'+1) = 2(k \times (2k'+1))$

$\Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{N} / n \times m = 2k''$ avec : $k'' = k \times (2k'+1) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n \times m\ \ \ pair$

4) Oui : $E : \forall (n;m) \in \mathbb{N}^2 :\ n\ pair \Leftrightarrow n^2\ \ pair$

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$

a)$\Rightarrow$) $n\ \ pair \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k\ \ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2) = 2k'$ avec : $k' = 2k^2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2\ \ \ pair$

b) $\Leftarrow$) Montrons que : $\forall (n;m) \in \mathbb{N}^2 :\ n^2\ \ pair \Rightarrow n\ \ pair$

il suffit de montrer sa contraposé

Montrons que : $\forall (n;m) \in \mathbb{N}^2 :\ \ n\ impair \Rightarrow n^2\ \ impair$

Soit $n \in \mathbb{N}$: $\ \ n\ \ \ impair \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k+1$

$\Rightarrow\ \ \exists k \in \mathbb{N} / n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2 \times (2k^2 + k) + 1 = 2k' + 1$ avec : $k' = 2k^2 + k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2\ \ impair$

Alors : $\forall (n;m) \in \mathbb{N}^2 :\ n^2\ \ pair \Rightarrow n\ \ pair$

Par suite : $E : \forall (n;m) \in \mathbb{N}^2 :\ \ n\ \ pair \Leftrightarrow n^2\ \ pair$ est vraie

Exercice9 : Soient $(x;y;z) \in \mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 12$

Montrer que : $x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $z \neq x$

Solution : Soient $(x;y;z) \in \mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 12$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x = y$ et $y = z$ et $z = x$

C'est-à-dire supposant que : $x = y = z$

Comme on a : $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 12$ et $x = y = z$

Alors : $x(x+x) + x(x+x) + x(x+x) = 12$

Donc : $2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$ contradiction car $x \in \mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Par suite : $x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $z \neq x$

Exercice10 :1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ ;\ (4n+1)^2 \prec 16n^2 + 8n + 3 \prec (4n+2)^2$

2) a) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ ;\ \sqrt{16n^2 + 8n + 3} \notin \mathbb{N}$

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}}\notin\mathbb{N}$

Solution :1) Comme : $16n^2+8n+3=\left((4n)^2+2\times 4n+1\right)+2=(4n+1)^2+2$

et comme : $(4n+1)^2\prec(4n+1)^2+2$

Alors : $(4n+1)^2\prec 16n^2+8n+3$

Calculons $(4n+2)^2$: $(4n+2)^2=(4n)^2+2\times4\times2n+4=16n^2+16n+4$

Comparons : $(4n+2)^2$ et $16n^2+8n+3$:

$(4n+2)^2-(16n^2+8n+3)=16n^2+16n+4-16n^2-8n-3=8n+1\succ 0$

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}:(4n+1)^2\prec 16n^2+8n+3\prec(4n+2)^2$

2) a) Déduisons que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{16n^2+8n+3}\notin\mathbb{N}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}:(4n+1)^2\prec 16n^2+8n+3\prec(4n+2)^2$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}\ 4n+1\prec\sqrt{16n^2+8n+3}\prec 4n+2$ et comme : $4n+2=(4n+1)+1$

Donc : $\sqrt{16n^2+8n+3}$ est compris strictement entre deux entiers consécutifs : $4n+1$ et $4n+2$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{16n^2+8n+3}\notin\mathbb{N}$

b) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}}\notin\mathbb{N}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}$: $4n+1\prec\sqrt{16n^2+8n+3}\prec 4n+2$

Donc : $4n^2+4n+1\prec 4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}\prec 4n^2+4n+2$

Donc : $(2n+1)^2\prec 4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}\prec 4n^2+4n+2\prec 4n^2+8n+4$

Donc : $(2n+1)^2\prec 4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}\prec(2n+2)^2$

Donc : $2n+1\prec\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}\prec 2n+2$

Donc : $n^2+2n+1\prec n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}\prec n^2+2n+2$

Donc : $(n+1)^2\prec n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}\prec n^2+2n+2\prec n^2+4n+4:(n+2)^2$

Donc : $n+1\prec\sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}}\prec n+2$

Donc : ce nombre est compris strictement entre deux entiers consécutifs : $n+1$ et $n+2=(n+1)+1$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}}\notin\mathbb{N}$

Exercice11 : Montrer par récurrence que : pour tout entier $n\geq 1$: $2^n\succ n$

Solution : Notons P(n) La proposition : « $2^n\succ n$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=1: 2^1=2$ donc $2^1\succ 1$

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\geq 1$: Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\succ n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\succ n+1$??

On a : $2^{n+1}=2\times 2^n\succ 2n$ (par hypothèse de récurrence)

et $n\geq 1\Rightarrow 2n=n+n\geq n+1$

On en déduit que : $2^{n+1}\succ 2n\geq n+1$ c'est-à-dire : $2^{n+1}\succ n+1$ ce qui montre le résultat souhaité.

Donc P(n+1) est vraie.

On conclut par récurrence que : $n\geq 1$: $2^n\succ n$

Exercice12 : Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*; 5^n\geq 3^n+2^n$

Solution : Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*; 5^n\geq 3^n+2^n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $5^1 = 1 \geq 3^1 + 2^1 = 5$
Donc P (0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$
Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $5^n \geq 3^n + 2^n$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $5^{n+1} \geq 3^{n+1} + 2^{n+1}$
On a : $5^n \geq 3^n + 2^n$ donc : $5^n \times 5 \geq 3^n \times 5 + 2^n \times 5$
Donc : $5^{n+1} \geq 3^n \times (3+2) + 2^n \times (2+3)$
Donc : $5^{n+1} \geq 3^{n+1} + 3^n \times 2 + 2^{n+1} + 2^n \times 3$
Donc : $5^{n+1} \geq 3^{n+1} + 2^{n+1} + (2^n \times 3 + 3^n \times 2) \geq 3^{n+1} + 2^{n+1}$
Donc : $5^{n+1} \geq 3^{n+1} + 2^{n+1}$.
Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*; 5^n \geq 3^n + 2^n$

Exercice13 : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$: On pose : $U_n = (1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = U_n \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \succ 2n+3$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6

Solution :1) a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = U_n \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$

Soit : $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = (1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{2(n+1)+1}\right)^2$

$$U_{n+1} = \underbrace{(1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2}_{=U_n} \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$$

Donc : $U_{n+1} = U_n \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$

b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \succ 2n+3$
1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons :
$U_0 = (1+1)^2 = 4$ et $2n+3 = 2\times 0+3 = 3$ et $U_0 \succ 2\times 0+3$
Donc P(0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $U_n \succ 2n+3$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $U_{n+1} \succ 2(n+1)+3$
C'est-à-dire : Montrons alors que : $U_{n+1} \succ 2n+5$

On a : $U_{n+1} = U_n \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$ et comme : $U_n \succ 2n+3$ alors : $U_{n+1} \succ (2n+3)\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$

Puisque : $(2n+3)\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 = \frac{4(n+2)^2}{2n+3} \succ 2n+5$

Donc : $U_{n+1} \succ 2n+5$
Conclusion : D'après le principe de récurrence on conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \succ 2n+3$

2) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N};\ n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0(0+1)(0+2)=0$ est divisible par 6

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/n(n+1)(n+2)=6k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)(n+2)(n+3)=6k''$??

$(n+1)(n+2)(n+3)=n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)\ =6k+3\times 2k'$ car $(n+1)(n+2)$ est pair

$$=6k+6k'=6(k+k')=6k''\quad k''\in\mathbb{N}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence on conclut que : $\forall n\in\mathbb{N};\ n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6

Exercice14 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$

Solution : $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$: a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$

$x-2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{2\}$

b) Résolvons l'équation : étudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

On va Opérer par disjonction de cas :

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ par suite : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{(x-2)}=2 \Leftrightarrow x(x+2)=2$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1+2=3\succ 0$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{3}$ et

$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{3}$

Tous les deux ne sont pas supérieurs à 2 donc : $S_1=\varnothing$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\prec 0$ donc : $|x-2|=-x+2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{-(x-2)}=2$ qui signifie que: $x(x+2)=-2$ c'est-à-dire : $x^2+2x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-2=-1\prec 0$

Comme $\Delta'\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions

Donc : $S_2=\varnothing$ Par suite : $S=S_1\cup S_2=\varnothing$

Exercice15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{x-1}=x$

Solution : Remarque : La relation $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x-1\geq 0$ Signifie que : $x\geq 1$

L'équation est donc définie sur : $D_E=[1,+\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{x-1}=x \Leftrightarrow \sqrt{x-1}^2=x^2$ et $x\geq 0$

$\Leftrightarrow x-1=x^2$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$ et $x\geq 0$

Le discriminant de : $x^2-x+1=0$ est : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$ donc pas de solutions

Par conséquent : $S=\varnothing$

Exercice16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : 1) (I_1): $1-\frac{x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Solution : Soit S l'ensemble des solutions de (E) et $x\in\left]-1;+\infty\right[$

On a : $x\in S\Leftrightarrow \frac{4-x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

1 cas : si $x\in\left[4;+\infty\right[$ alors $4-x\leq 0$ donc $S_1=\varnothing$

2 cas : si $x\in\left]-1;4\right[$ alors $4-x\geq 0$

Donc : $\frac{4-x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}\Leftrightarrow\left(\frac{4-x}{4}\right)^2\succ\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2\Leftrightarrow x\left(x^2-7x+8\right)\succ 0$

x	-1 … 0	0 … $\frac{7-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{7-\sqrt{17}}{2}$ … 4	4 … $\frac{7+\sqrt{17}}{2}$	$\frac{7+\sqrt{17}}{2}$ … $+\infty$
x	$-$	0 $+$	$+$	$+$	$+$
x^2-7x+8	$+$	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
$x(x^2-7x+8)$	$-$ 0	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$

$x\left(x^2-7x+8\right)\succ 0\Leftrightarrow x\in\left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Donc : $S_2=\left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Donc : $S=S_1\cup S_2=\left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Exercice17 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et discuter suivant le paramètre m le système suivant :

$$\begin{cases}(m+1)x+3y=m\\3x+(m+1)y=2\end{cases}\quad(I)$$

Solution : 1) On utilise la Méthode des déterminants

On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix}m+1 & 3\\3 & m+1\end{vmatrix}=(m+1)\times(m+1)-3\times3=(m+1)^2-3^2=(m+1-3)(m+1+3)=(m-2)(m+4)$$

$\Delta=0$ Signifie que : $(m-2)(m+4)=0$ Signifie que : $m-2=0$ ou $m+4=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=2$ ou $m=-4$

1ere cas : si $\Delta \neq 0$ c'est-à-dire : $m \neq 2$ et $m \neq -4$ Alors le système (I) admet un couple solution unique : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix}}{(m-2)(m+4)} = \frac{m(1+m)-6}{m^2-1} = \frac{m^2+m-6}{(m-2)(m+4)} = \frac{(m-2)(m+3)}{(m-2)(m+4)} = \frac{m+3}{m+4}$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{(m-2)(m+4)} = \frac{2(1+m)-3m}{(m-2)(m+4)} = \frac{-(m-2)}{(m-2)(m+4)} = -\frac{1}{m+4}$$

Donc : $S = \left\{ \left(\frac{m+3}{m+4}; -\frac{1}{m+4} \right) \right\}$

2ere cas : si $\Delta = 0$ c'est-à-dire : $m = 2$ ou $m = -4$

Si $m = 2$ on remplace m par 2 on trouve : $\begin{cases} 3x+3y=2 \\ 3x+3y=2 \end{cases}$ qui est équivalent a : $3x+3y=2$

Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation $3x+3y=2$

$3x+3y=2$ est équivalent a : $3y = 2-3x$ Signifie que : $y = \frac{2}{3} - x$

Alors on a : $S = \left\{ \left(x; \frac{2}{3} - x \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

Si $m = -4$ on remplace m par -4 on trouve : $\begin{cases} -3x+3y=-4 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases} 3x-3y=4 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$ impossible Donc: $S = \varnothing$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien