1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°6 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice 1 : On considère les assertions suivantes P :"$\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right): 1+x \geq 2\sqrt{x}$ *et* $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$"

Q :"$\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right): x+\frac{1}{x} \succ 2$ *ou* $x^2+x \prec 1$"

1) Montrer que P est une assertion vraie
2) Déterminer : $\overline{P}$
3) Montrer que Q est une assertion fausse

Solution :1) Montrons que P :"$\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right): 1+x \geq 2\sqrt{x}$ *et* $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$"

a) Soit : $x \in \left]0;+\infty\right[$; Montrons que : $1+x \geq 2\sqrt{x}$

$1+x-2\sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x}\times 1 + 1^2 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$

Donc : $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right): 1+x \geq 2\sqrt{x}$ est vraie

b) Montrons que "$\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right): \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$"

Soit : $x \in \left]0;+\infty\right[$; Montrons que : $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{x^2-2x+1^2}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$ est vraie "$\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right): \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$" est vraie

Par suite : P est une assertion vraie

2)Déterminons : $\overline{P}$

$\overline{P}$:"$\left(\exists x \in \left]0;+\infty\right[\right): 1+x \prec 2\sqrt{x}$ *ou* $\frac{x}{1+x^2} \succ \frac{1}{2}$"

3) Q :"$\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right): x+\frac{1}{x} \succ 2$ *ou* $x^2+x \prec 1$"

$\overline{Q}$:"$\left(\exists x \in \left]0;+\infty\right[\right): x+\frac{1}{x} \leq 2$ *et* $x^2+x \geq 1$"est vraie car :$\left(\exists 1 \in \left]0;+\infty\right[\right): 1+\frac{1}{1} \leq 2$ et $1^2+1 = 2 \geq 1$

Par suite : Q est une assertion fausse

Exercice 2 : On considère la proposition suivante :$P;\left(\forall x \in \mathbb{R}\right): x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

1) Ecrire la négation de P
2) Déterminer la valeur de vérité de P

Solution :1) On a : $P;\left(\forall x \in \mathbb{R}\right): x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ alors : $\overline{P};\left(\exists x \in \mathbb{R}\right): x^2 = 36$ *et* $x \neq 6$

Car : $\overline{P_1 \Rightarrow P_2} \Leftrightarrow P_1$ *et* $\overline{P_2}$

2) On a : $\overline{P}$ est vraie car $\left(\exists -6 \in \mathbb{R}\right): (-6)^2 = 36$ *et* $-6 \neq 6$

Par suite : P est une proposition fausse.

Exercice 3 : Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $P: \left(\exists x \in \mathbb{R}\right)\left(\exists x \in \mathbb{R}\right); x+y=1$
2) $Q: \left(\forall x \in \{1;2\}\right)\left(\exists y \in \{-2;-1;0\}\right) / x+y=0$
3) $R: \left(\forall x \in \{-2;-1;0\}\right)\left(\exists y \in \{1;2\}\right) / x+y=0$

Solution : 1) $P:\left(\exists x=0\in\mathbb{R}\right)\left(\exists x=1\in\mathbb{R}\right);0+1=1$

Donc : P est une proposition vraie

2) $Q:\left(\forall x\in\left\{1;2\right\}\right)\left(\exists y\in\left\{-2;-1;0\right\}\right)/\,x+y=0$

Si : $x=1$; $\exists y=-1$ $/1+\left(-1\right)=0$

Si : $x=2$; $\exists y=-2$ $/2+\left(-2\right)=0$

Donc : $Q:\left(\forall x\in\left\{1;2\right\}\right)\left(\exists y\in\left\{-2;-1;0\right\}\right)/\,x+y=0$ est une proposition vraie

3) $R:\left(\forall x\in\left\{-2;-1;0\right\}\right)\left(\exists y\in\left\{1;2\right\}\right)/\,x+y=0$

$\overrightarrow{R}:\left(\exists x\in\left\{-2;-1;0\right\}\right)\left(\forall y\in\left\{1;2\right\}\right)/\,x+y\neq 0$

$\left(\exists x=0\right)\left(\forall y\in\left\{1;2\right\}\right)/\,0+y\neq 0$

$\overrightarrow{R}$: est une proposition vraie par suite : R est fausse

REMARQUE : L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs change la signification et la valeur de vérité d'une proposition

Exercice 4 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x^2+1\succ 0$

Solution : Montrons que cette proposition découle de résultats antérieurs :
Soit $x\in\mathbb{R}$: On sait que $x^2\geq 0$ et $1\succ 0$ Or : $a\geq 0$ et $b\succ 0$ $\Rightarrow$ $a+b\succ 0$

Donc : $x^2+1\succ 0$

Exercice 5 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases}0\leq x\prec 2\\0\leq y\prec 2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ 1$

Solution : $\begin{cases}0\leq x\prec 2\\0\leq y\prec 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}\succ\frac{1}{2}\\\frac{1}{y}\succ\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ 1$

Exercice 6 : x ; $y\in\mathbb{R}$: Montrer que : $x^2=y^2\Rightarrow\left|x\right|=\left|y\right|$

Solution : *Pour* démontrer la véracité d'une implication :
P ⇒ Q on peut procéder de deux manières :
(1) Par déduction : on détermine une assertion R telle que : P ⇒ R et R ⇒ Q. (avec possibilité d'enchaîner plusieurs assertions intermédiaires)
(2) Par contraposée : on établit non(Q) ⇒ non(P)

Soient x ; $y\in\mathbb{R}$. Montrons : $x^2=y^2\Rightarrow\left|x\right|=\left|y\right|$

On va procéder Par déduction : Supposons : $x^2=y^2$.

On a : $x^2=y^2$ donc : $x^2-y^2=0$

Donc : $\left(x-y\right)\left(x+y\right)=0$

Donc : $x-y=0$ ou $x+y=0$

Par suite : $x=y$ ou $x=-y$

Et donc : $\left|x\right|=\left|y\right|$

Exercice 7 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:x^2\neq 3\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\neq 1$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : : $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}=1\Rightarrow x^2=3$??

Soient : $x\in\mathbb{R}$

On a : $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}=1\Rightarrow 2=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x^2+1=4\Rightarrow x^2=3$ $x\left(y^2+y+1\right)=y\left(x^2+x+1\right)$

Donc : : $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}=1\Rightarrow x^2=3$

Donc par contraposition on déduit que :

$\forall x\in\mathbb{R}: x^2\neq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\neq 1$

Exercice 8 : $x\neq -5$: Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin[-1;4] \Rightarrow x^2-3x-4>0$

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $x^2-3x-4\leq 0\Rightarrow x\in[-1;4]$

$\Delta=(-3)^2-4\times(-4)=9+16=25\succ 0$

Donc : deux racines : $x_1=\frac{3+\sqrt{25}}{2}=\frac{3+5}{2}=4$ et $x_2=\frac{3-\sqrt{25}}{2}=\frac{3-5}{2}=-1$

Tableau de signe :

x	$-\infty$ -1 4 $+\infty$
x^2-3x-4	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$x^2-3x-4\leq 0$ si $x\in[-1;4]$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x^2-3x-4\leq 0\Rightarrow x\in[-1;4]$

Alors : Par contraposition :

$\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin[-1;4] \Rightarrow x^2-3x-4>0$

Exercice 9 : Montrer par un Raisonnement par équivalence que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$

$\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=0$

Solution : Utilisons un Raisonnement par équivalence

Soient : $x\in\mathbb{R}^+$; On a : $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\Leftrightarrow x+1=1+x+\frac{x^2}{4}$

$\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 0=\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow 0=x^2\Leftrightarrow 0=x$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=0$

Exercice 10 : Montrer que Les propositions suivante sont fausses :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2+y^2\geq x+y$

2) $Q:(\forall x\in[0;1]): x^2\geq x$

3) R:«Tout entier positif est somme de trois carrés »

4) $M:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$

5) $N:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$

Solution : 1) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2+y^2\geq x+y$

Sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2+y^2\prec x+y$

En posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec 1+\frac{1}{2}$ c a d $\frac{5}{4}\prec\frac{6}{4}$

Donc : La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

2) $Q:(\forall x\in[0;1]):x^2\geq x$

Sa négation est : $\overline{Q}:(\exists x\in[0;1]):x^2\prec x$

En posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{Q}$ est vraie donc Q est fausse

3) R:«Tout entier positif est somme de trois carrés ».

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple : $6=1^2+1^2+2^2$.)

Un contre-exemple : les carrés inférieurs à7 sont 0,1,4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

Donc R est fausse

4) $M:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$

Sa négation est :

$\overline{M}:\exists(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\c\neq d\end{cases}$ et $a+c=b+d$

On a : $2\neq 3$ et $1\neq 0$ et $2+1=3+0$

Donc ; La proposition $\overline{M}$ est vraie donc M est fausse

5) $N:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$ Sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2\neq 0$

En posant : $x=1$ on aura : $1-y+y^2$ C'est-à-dire : y^2-y+1

$\Delta=(-1)^2-4=-3\prec 0$ Donc : $y^2-y+1\succ 0$ donc : $y^2-y+1\neq 0$

Donc : La proposition $\overline{N}$ est vraie donc N est fausse

Exercice 11 : Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$

Solution : Nous raisonnons par équivalence : Soit : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

$a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2\left(a\times b+a\times c+b\times c\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2a\times b-2a\times c-2b\times c\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(a^2-2a\times b+b^2\right)+\left(a^2-2a\times c+c^2\right)+\left(b^2-2b\times c+c^2\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$; (vraie)

Donc : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$

Exercice 12 : Soit $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$ tel que : $a+b+c=1$

1) Montrer que : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$; $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$

2) Déduire que : $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

3) Montrer que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$

Solution : 1) Montrons que : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$; $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$

Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$: $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$; (vraie)

Donc : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$; $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$

2) Déduisons que : $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

On a : $a+b+c=1\Rightarrow(a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$

$\Rightarrow 2ab+2ac+2bc=1-\left(a^2+b^2+c^2\right)$

On a :D'apés1) : $a^2+b^2\geq 2ab$ et $a^2+c^2\geq 2ac$ et $b^2+c^2\geq 2bc$ et la somme de ces inégalités

$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2\geq 2(ab+ac+bc)$

$\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 1-\left(a^2+b^2+c^2\right)\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 1$

$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 1\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

3)Montrons que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$

On a : $a+b+c=1\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\underbrace{a+b+c}_{=1}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)+\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)+\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)$

Comme : $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$ et $\frac{a^2+c^2}{ac}\geq 2$ et $\frac{b^2+c^2}{bc}\geq 2$

Alors : $\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3+2+2+2\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$

Exercice 13 : Soit f la fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ par : $f(0)=3$ et $f(n+1)=2f(n)+5$

1)a) Calculer : $f(1)$; $f(2)$

b) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)\succ 0$ et déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)-f(n)\succ 0$

2) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}/\,f(n)=2^{n+3}-5$

Solution : 1) On a : $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)=2f(n)+5$

Pour : $n=0$: $f(0+1)=2f(0)+5\Rightarrow f(1)=2f(0)+5\Rightarrow f(1)=2\times 3+5=11$

Pour : $n=1$: $f(1+1)=2f(1)+5\Rightarrow f(2)=2f(1)+5\Rightarrow f(2)=2\times 11+5=27$

b) Montrons que : $P(n)$" $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)\succ 0$"

1étapes : l'initialisation : Pour n =0 nous avons : $f(0)=3\succ 0$

Donc $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n)\succ 0$"

Montrons que : $f(n+1)\succ 0$"??

On a : $f(n+1)=2f(n)+5$ et puisque $f(n)\succ 0$

Alors : $2f(n)\succ 0\Rightarrow 2f(n)+5\succ 5\succ 0$ c'est-à-dire : $f(n+1)\succ 0$"

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) \succ 0$

Soit : $n \in \mathbb{N}$ on a : $f(n+1) = 2f(n) + 5$

Donc : $f(n+1) - f(n) = 2f(n) + 5 - f(n) = f(n) + 5 \succ 0$ car $f(n) \succ 0$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ f(n+1) - f(n) \succ 0$

2) Montrons par récurrence que : $P(n)$ " $\forall n \in \mathbb{N} \ / \ f(n) = 2^{n+3} - 5$ "

1étapes : l'initialisation : Pour n =0 nous avons : $f(0) = 3$ et $2^{0+3} - 5 = 8 - 5 = 3$

Donc $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n) = 2^{n+3} - 5$ "

Montrons que : $f(n) = 2^{n+4} - 5$ "??

On a : $f(n+1) = 2f(n) + 5$ et $f(n) = 2^{n+3} - 5$

Alors : $f(n+1) = 2\left(2^{n+3} - 5\right) + 5 = 2^{n+4} - 10 + 5 = 2^{n+4} - 5$

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) = 2^{n+3} - 5$ "

Exercice 14 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;7 divise $4^{2n} - 3^{2n}$

Solution : 1étapes : l'initialisation :

Pour n=0 nous avons $4^{2n} - 3^{2n} = 4^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ et 7 divise 0

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} \ / \ 4^{2n} - 3^{2n} = 7k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} \ / \ 4^{2n+2} - 3^{2n+2} = 7k'$??

$4^{2n+2} - 3^{2n+2} = 4^2 \times 4^{2n} - 3^2 \times 3^{2n} = 16 \times 4^{2n} - 9 \times 3^{2n}$

$= (7+9) \times 4^{2n} - 9 \times 3^{2n} = 7 \times 4^{2n} + 9 \times 4^{2n} - 9 \times 3^{2n}$

$= 7 \times 4^{2n} + 9 \times \left(4^{2n} - 3^{2n}\right) = 7 \times 4^{2n} + 9 \times 7k = 7 \times \left(4^{2n} + 9k\right) = 7k'$ avec $k' = 4^{2n} + 9k$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : : $\forall n \in \mathbb{N}$; 7 divise $4^{2n} - 3^{2n}$

Exercice 15 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $\sum_{p=1}^{1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$??

On a : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Donc $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$

Donc : $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n+1}{n+2}$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\frac{n}{n+1}$

Exercice 16 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.
2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{4n^2+5n+3}\notin\mathbb{N}$
3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrer que si n est un carré parfait, alors $2n$ ne peut pas être un carré parfait.
Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique.
Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrons que : n^2+1 n'est pas un carré parfait.
Par l'absurde, supposons que n^2+1 est un carré parfait, donc il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que :
$n^2+1=m^2$
On a : $n^2\prec n^2+1$ et $n^2+1\prec(n+1)^2$ (car $(n+1)^2-n^2+1=2n\succ 0$)
C'est-a-dire : $n^2\prec n^2+1\prec(n+1)^2$
Donc : $n^2\prec m^2\prec(n+1)^2$
Par suite : $n\prec m\prec n+1$
C'est-à-dire : il existe un entier naturel strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est contradictoire
Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; n^2+1 n'est pas un carré parfait.
2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n^2+5n+3}\in\mathbb{N}$
C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n^2+5n+3}=m$
$\sqrt{4n^2+5n+3}=m\Rightarrow 4n^2+5n+3=m^2$ et comme : $(2n+1)^2\prec 4n^2+5n+3\prec(2n+2)^2$
Alors : $2n+1\prec\sqrt{4n^2+5n+3}\prec 2n+2$
Alors : $2n+1\prec m\prec 2n+2$
C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $2n+1$ et $2n+2$
Ceci signifie que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{4n^2+5n+3}\notin\mathbb{N}$
3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Montrons que si n est un carré parfait, alors $2n$ ne peut pas être un carré parfait.
Par l'absurde, supposons que : n est un carré parfait, et $2n$ est un carré parfait,
Donc : il existe : $m\in\mathbb{N}^*$ tel que : $n=m^2$ et $\exists p\in\mathbb{N}^*$ tel que : $2n=p^2$
On a : $n=m^2$ donc : $2n=2m^2$ et donc : $2m^2=p^2$
Donc : $\exists p\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{2}m=p$
Donc : $\exists m\in\mathbb{N}^*\ \exists p\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{2}=\frac{p}{m}\in\mathbb{Q}$
C'est une contradiction car on a : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$
Exercice 17 : 1) Montrer par disjonction des cas que :
1) $\forall n\in\mathbb{N}$: n^2+n+1 est un nombre impair.

2) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2) \succ 0$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2-x+1$

Solution : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Premier cas : si n est pair : $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$

$n^2+n+1=(2k)^2+2k+1=4k^2+2k+1=2(2k^2+k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+k \in \mathbb{N}$

Donc : n^2+n+1 est un nombre impair.

2 iem cas : si n est impair : $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1$

$n^2+n+1=(2k+1)^2+2k+1+1=4k^2+4k+1+2k+1+1=2(2k^2+3k+1)+1=2k'+1$

avec $k'=2k^2+3k+1 \in \mathbb{N}$

Donc : n^2+n+1 est un nombre impair.

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall n \in \mathbb{N} : n^2+n+1$ est un nombre impair.

2) Montrons par disjonction des cas que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2) \succ 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2) \succ 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \succ -\frac{1}{2}(x+2)$

Premier cas : si $x+2 \succ 0$ c'est-à-dire ; $x \succ -2$ donc : $-\frac{1}{2}(x+2) \prec 0$

Alors : $\sqrt{x^2+1} \succ -\frac{1}{2}(x+2)$ car $\sqrt{x^2+1} \succ 0$ et $-\frac{1}{2}(x+2) \prec 0$

2 ieme cas : si $x+2 \leq 0$ c'est-à-dire ; $x \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x+2) \geq 0$

$\sqrt{x^2+1} \succ -\frac{1}{2}(x+2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \succ \frac{1}{4}(x+2)^2$

$\Leftrightarrow 4(x^2+1) \succ x^2+4x+4 \Leftrightarrow 4x^2+4-x^2-4x-4 \succ 0 \Leftrightarrow 3x^2-4x \succ 0$

Comme : $3x^2-4x \succ 0$ sur $]-\infty;-2]$ (proposition vraie) (on dresse le tableau de signe de : $3x^2-4x$

Alors : si $x \leq -2$ $\sqrt{x^2+1} \succ -\frac{1}{2}(x+2)$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2) \succ 0$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2-x+1$

Soit $x \in \mathbb{R}$: Premier cas : si $x-1 \geq 0$ c'est-à-dire ; $x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x+1$

$|x-1| \leq x^2-x+1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2-x+1-x+1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2-2x+2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2+1$

Comme : $0 \leq (x-1)^2+1$ est une proposition vraie

Alors : si $x \geq 1$: $|x-1| \leq x^2-x+1$

2 ieme cas : si $x-1 \prec 0$ c'est-à-dire ; $x \prec 1 \Rightarrow |x-1| = -x-1$

$|x-1| \leq x^2-x+1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2-x+1+x-1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2$

Comme : $0 \leq x^2$ est une proposition vraie

Alors : si $x \prec 1$: $|x-1| \leq x^2-x+1$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2-x+1$

Exercice18 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1): $\sqrt{x+3}=x+1$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'équation (2)

$D_2=\{x\in\mathbb{R}/x+3\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -3\}=[-3;+\infty[$

Soit $x\in[-3;+\infty[$: $\sqrt{x+3}=x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(x+1)^2$ et $x+1\geq 0$

$\Leftrightarrow x+3=x^2+2x+1$ et $x\geq -1$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$ et $x\geq -1$ et comme : $\Delta=1-4\times(-2)\times 1=9\succ 0$

L'équation admet deux solutions distinctes : $x=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$ et $x'=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$ et comme : $-2\prec -1$ et $1\succ -1$

Donc l'ensemble des solutions de L'équation (2) est : $S=\{1\}$

Exercice 19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_1): $\sqrt{5x^2+1}\succ 2x-1$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation : (I_1): $\sqrt{5x^2+1}\succ 2x-1$

$D=\{x\in\mathbb{R}/5x^2+1\geq 0\}=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et S l'ensemble des solutions de (I_1) :

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{5x^2+1}\succ 2x-1$

Le tableau de signe de l'expression $2x-1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$

1ieme cas : si $2x-1\leq 0$ c'est-à-dire : $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $S_1=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ car l'inéquation est toujours vérifiée ($\sqrt{5x^2+1}\geq 0$ et $2x-1\leq 0$)

2ieme cas : si $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $2x-1\succ 0$

$\sqrt{5x^2+1}\succ 2x-1\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x^2+1}\right)^2\succ(2x-1)^2\Leftrightarrow 5x^2+1\succ 4x^2-4x+1\Leftrightarrow x^2+4x\succ 0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

Donc : $S_2=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\cap\left(\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $S=S_1\cup S_2=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[=\mathbb{R}$

Exercice 20 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$x^2-2(m+1)x+4=0$; (E)

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^2-2(m+1)x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-2(m+1)x+4=0$ est : $\Delta=\left[-2(m+1)\right]^2-4\times 1\times 4=(2m+2)^2-16$

$\Delta=(2m+2)^2-4^2=(2m+2-4)(2m+2+4)=(2m-2)(2m+6)=4(m-1)(m+3)$

On cherche le tableau de signe de l'expression : $\Delta=4(m-1)(m+3)$

m	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(m-1)(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On va Opérer par disjonction de cas :

1ére cas : $m \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$ on a ; $\Delta = 4(m-1)(m+3) > 0$:

Donc : l'Equation (E) admet deux solutions réelles distinctes x1 et x2 telles que :

$x_1 = \dfrac{2(m+1)-\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2} = (m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)}$ et

$x_2 = \dfrac{2(m+1)+\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2} = (m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}$

Donc : $S = \left\{(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)};(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}\right\}$

2ére cas : $m \in]-3;1[$ on a $\Delta = 4(m-1)(m+3) < 0$:

Donc : L'équation n'admet pas de solutions

Donc : $S = \varnothing$

3ére cas : $m = 1$: on a $\Delta = 4(1-1)(1+3) = 0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2(m+1)}{2\times 1} = m+1 = 2$

Donc : $S = \{2\}$

4ére cas : $m = -3$: on a $\Delta = 4(-3-1)(-3+3) = 0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2(m+1)}{2\times 1} = -3+1 = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien