1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°5 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $P_1 : (\exists n \in \mathbb{N}) ; 95 \prec n^2 \prec 101$

2) $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) ; |x| \leq 0$

3) $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; x + \sqrt{x} \succ 2$

4) $P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; x + \frac{1}{x} \geq 2$

5) $P_5 : (\exists x \in \mathbb{Q}) ; x^2 = 9$

6) $P_6 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) ; x - y = 3$

7) $P_7 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in]-\infty; 1[) ; 3x^2 y - x + y = 0$

8) $P_8 : (\forall x \in [0;2])\left(\exists y \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\right) ; xy - x + 2y - 1 = 0$

9) $P_9 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) ; x \prec y^2$

10) $P_9 : (\exists! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$

Solution : 1) La proposition P_1 : est vraie

(Par exemple 10 ; $(\exists n = 10 \in \mathbb{N}) ; 95 \prec n^2 \prec 101$):

2) La proposition P_2 : est vraie, il suffit de prendre :

$x = 0$ et on trouve $|0| \leq 0$

3) On a $0 \in \mathbb{R}^+$ mais $0 + \sqrt{0} \leq 2$, alors la proposition P_3 : est fausse.

4) On a : $-1 \in \mathbb{R}^*$ mais : $-1 + \frac{1}{-1} = -2 \prec 2$ alors la proposition P_4 : est fausse.

5) Puisque les solutions de liquation $x^2 = 9$ sont : -3 *et* 3

Alors la proposition P_5 : est vraie.

6) Soit $x \in \mathbb{Z}$ existe-t-il y dans $\mathbb{Z}$ tel que : $x - y = 3$?

On a : $x - y = 3 \Leftrightarrow y = x - 3 \in \mathbb{Z}$

Donc : la proposition P_6 : est vraie.

7) Soit $x \in \mathbb{R}$; existe-t-il y dans $]-\infty; 1[$ tel que : $3x^2 y - x + y = 0$?

$$3x^2 y - x + y = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 + 1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{3x^2 + 1}$$

Il reste à montrer que : $y \in]-\infty; 1[$

$$y - 1 = \frac{x}{3x^2 + 1} - 1 = \frac{x - 3x^2 - 1}{3x^2 + 1} = -\frac{3x^2 - x + 1}{3x^2 + 1}$$

On a : $3x^2 - x + 1 \succ 0$ car $\Delta = -11 \prec 0$ et $a = 3 \succ 0$ et on a : $3x^2 + 1 \succ 0$

Donc : $y - 1 \prec 0$ c'est-a-dire : $y \prec 1$

Par suite : la proposition P_7 : est vraie.

8) Soit $x \in [0;2]$; existe-t-il y dans $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ tel que : $xy - x + 2y - 1 = 0$?

$$xy - x + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow xy + 2y = 1 + x \Leftrightarrow y(x + 2) = 1 + x \Leftrightarrow y = \frac{1 + x}{x + 2} = 1 - \frac{1}{x + 2}$$

Il reste à montrer que : $y \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ Comme : $0 \leq x \leq 2$ alors : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x + 2} \leq \frac{1}{2}$ donc : $1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{x + 2} \leq 1 - \frac{1}{4}$

D'où : $y \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$

Par suite : la proposition P_8 :est vraie.

9) $P_9 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x \prec y^2$

il suffit de prendre : $x=-1$ et on trouve : $(\forall y \in \mathbb{R}); -1 \prec y^2$ (vraie)

Par suite : la proposition P_9 :est vraie.

10) $P_9 : (\exists! x \in [-1;0])(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 y + 4xy + 1 = 0$

Si on prend : $y=1$: on retrouve la proposition : $(\exists! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$?

$\Delta = 16-4 = 12 \succ 0$: $x_1 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3} \approx -0,26 \in [-1;0]$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2-\sqrt{3} \notin [-1;0]$

Par suite : $(\exists! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$ est vraie

Conclusion : $P_9 : (\exists! x \in [-1;0])(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 y + 4xy + 1 = 0$ est vraie

Exercice2 : Soient P et Q deux propositions

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) Donner la négation de la proposition : $P \Rightarrow Q$

2) Donner la valeur de vérité de : $(1=2) \Rightarrow (2=3)$

Solution :1) $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

La négation de la proposition : $(1=2) \Rightarrow (2=3)$ est $(1=2)$ *et* $(2 \neq 3)$ qui est faux

Donc : $(1=2) \Rightarrow (2=3)$ est une proposition vraie

Exercice3 : On considère les assertions suivantes : P ;$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : x \geq 2\sqrt{x} - 1$

Q ;$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : xy \neq x$

1) Ecrire la négation de P et Q

2) Déterminer la valeur de vérité de P et Q

Solution :1) a) On a : P ;$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : x \geq 2\sqrt{x} - 1$

Alors : $\overline{P}$;$(\exists x \in \mathbb{R}^+) : x \prec 2\sqrt{x} - 1$

b) On a : Q ;$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : xy \neq x$

Alors : $\overline{Q}$;$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : xy = x$

2) a) Soit : $x \in \mathbb{R}^+$; $x \geq 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$

Or : $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ est une assertion vraie

Et on a : $x \geq 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$

Donc : P ;$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : x \geq 2\sqrt{x} - 1$ est vraie

b) $\overline{Q}$;$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : xy = x$

On a : $(\exists 1 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x \times 1 = x$ donc : $\overline{Q}$ est une assertion vraie

Par suite : Q est une assertion fausse

Exercice4 : Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
a) Il existe un nombre rationnel dont le carré vaut deux.
b) La somme de deux nombres positifs quelconques est un nombre positif.
c) Le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre positif.
d) L'équation $x^2-3x+1=0$ admet une solution réelle.
e) Tout entier naturel est pair ou impair.
f) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.
g) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.
h) Si un nombre réel x inférieur de -1 alors il est strictement négatif.
i) Le produit de deux réels est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul.
j) L'équation sin x = x a une et une seule solution dans ℝ.

Solution :a) $(\exists x\in\mathbb{Q})/\ x^2=2$

b) $(\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})/\,x\geq 0\ et\ y\geq 0\ \Rightarrow x+y\geq 0$

c) $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 0$

d) $(\exists! x\in\mathbb{R});x^2-3x+1=0$

e) $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists k\in\mathbb{N})/\,n=2k\ ou\ n=2k+1$

f). $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists m\in\mathbb{N});m\succ n$

g) $(\exists m\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N});n\leq m$

h) $(\forall x\in\mathbb{R}):x\leq -1\ \Rightarrow x\prec 0$

i) $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}):xy=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ y=0$

j) $(\exists! x\in\mathbb{R});\sin x=x$

Exercice5 : 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}\ x\in[0;1]\Rightarrow\frac{1}{x+1}\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

2) Montrer que : $x\in[0;1]$ et $y\in[0;1]\ \Rightarrow\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|\leq|x-y|$

Solution : 1) Montrons que : si $x\in[0;1]$ alors $\frac{1}{x+1}\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

On a : $x\in[0;1]$ signifie $0\leq x\leq 1$

Donc : $1\leq x+1\leq 2$

Donc : $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{x+1}\leq 1$

Ceci signifie que : $\frac{1}{x+1}\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

2) Montrons que : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|\leq|x-y|$

Soient : $x\in[0;1]$ et $y\in[0;1]$;

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}=\frac{1+y-1-x}{(1+x)(1+y)}=\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$$

Donc on obtient : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=\left|\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right|=\frac{|y-x|}{|(1+x)(1+y)|}$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=|x-y|\times\frac{1}{|(1+x)(1+y)|}$ car $|y-x|=|x-y|$

On a : $1\leq x+1\leq 2$ et $1\leq y+1\leq 2$ donc $(1+x)(1+y)>0$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=|x-y|\times\frac{1}{(1+x)(1+y)}$

On a aussi : $1\leq x+1\leq 2$ et $1\leq y+1\leq 2$ donc $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{x+1}\leq 1$ et $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{y+1}\leq 1$

Donc : $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{(1+x)(1+y)}\leq 1$ et puisque : $0\leq|x-y|$

Alors : $\frac{|x-y|}{4}\leq|x-y|\frac{1}{(1+x)(1+y)}\leq|x-y|$

Ce qui entraine que : $\frac{|x-y|}{4}\leq\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|\leq|x-y|$

Donc : $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|\leq|x-y|$

Exercice6 : 1) Montrer que : $(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2): a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ et $\forall y\in\mathbb{R}^+$: $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\Leftrightarrow x+y=0$

4) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$: $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

5) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$ et $\forall y\in\mathbb{R}^{*+}$

$x\prec y\Leftrightarrow\frac{x}{y}\prec\frac{2x+5y}{5x+2y}\prec\frac{y}{x}$

Solution : 1) Montrons l'équivalence en raisonnant par double implication :

$\Rightarrow$) Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ Supposons : $a^2+b^2=0\Rightarrow a^2=-b^2\Rightarrow a^2\in\mathbb{R}^-$

Or on sait que $a^2\in\mathbb{R}^+$ donc $a^2\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-$

Donc $a^2=0$ par suite : $a=0$

Et puisque $a^2+b^2=0$ alors $b=0$

$\Leftarrow$) Supposons : $a=0$ et $b=0$ alors : $0^2+0^2=0$

Par suite : : $(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2): a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Soit $(a;b)\in(\mathbb{R}^+)^2$: $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x}-1=0$ et $\sqrt{y}-1=0$ (d'apres1)$\Rightarrow\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=1\Rightarrow x=1$ et $y=1$

3) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\Leftrightarrow x+y=0$

Montrons l'équivalence en raisonnant par double implication :Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$) Supposons : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ et Montrons que : $x+y=0$

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\Rightarrow\Rightarrow\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

$\Rightarrow\left(x^2-x^2-1\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow -y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}$ ①

On a : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ alors : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$

Par suite : $-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}$

D'où : $x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}$ ②

D'après : ① et ② on a : $\begin{cases} x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \\ x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1} \end{cases}$

Alors : $2(x+y)=\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

Alors : $2(x+y)=0$ c'est-à-dire : $x+y=0$

D'où : : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\Rightarrow x+y=0$

$\Leftarrow$) Supposons : $x+y=0$ et Montrons que : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ On a : $x+y=0\Rightarrow y=-x$

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$$

$$=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) \quad =-\left(x^2-x^2-1\right)=1$$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $x+y=0\Rightarrow\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$

4) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$; On a : $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 2x+2=1+2\sqrt{x}+x\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x}\Leftrightarrow(x+1)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2\Leftrightarrow x^2+2x+1=4x$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

5) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ et $\forall y\in\mathbb{R}^+$

$$x\prec y\Leftrightarrow\frac{x}{y}\prec\frac{2x+5y}{5x+2y}\prec\frac{y}{x}$$

Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

$$\frac{x}{y}\prec\frac{2x+5y}{5x+2y}\prec\frac{y}{x}\overset{\times xy}{\Leftrightarrow}\frac{x}{y}\times xy\prec\frac{2x+5y}{5x+2y}\times xy\prec\frac{y}{x}\times xy\Leftrightarrow x^2\prec\frac{2x+5y}{5x+2y}\times xy\prec y^2$$

$\Leftrightarrow x^2(5x+2y)\prec(2x+5y)\times xy\prec y^2(5x+2y)$

$\Leftrightarrow 5x^3+2yx^2\prec 2x^2y+5xy^2\prec 5xy^2+2y^3$

$\Leftrightarrow 5x^3+2yx^2\prec 2x^2y+5xy^2 \quad et \quad 2x^2y+5xy^2\prec 5xy^2+2y^3$

$\Leftrightarrow 5x^3\prec 5xy^2 \quad et \quad 2x^2y\prec 2y^3$

$\Leftrightarrow x^2\prec y^2 \quad et \quad x^2\prec y^2 \quad\Leftrightarrow x^2\prec y^2 \quad\Leftrightarrow x\prec y$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$ et $\forall y\in\mathbb{R}^{*+}$: $x\prec y\Leftrightarrow\frac{x}{y}\prec\frac{2x+5y}{5x+2y}\prec\frac{y}{x}$

Exercice7 : 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$

$x\neq y \ et \ x+y\neq 1\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}\neq\sqrt{y^2-y+1}$

2) Montrer que : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\succ\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a\succ b$

Solution : 1) Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y \text{ ou } x+y=1$??

Soient : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

On a : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1} \Rightarrow x^2-x+1=y^2-y+1$

$\Rightarrow x^2-y^2-(x-y)=0 \Rightarrow (x-y)(x+y)-(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Rightarrow x-y=0 \text{ ou } x+y-1=0$

$\Rightarrow x=y \text{ ou } x+y=1$

Donc : $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{y^2-y+1}\Rightarrow x=y \text{ ou } x+y=1$

Donc par contraposition on déduit que : $x\neq y\Rightarrow (x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

2) Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $a\le b\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$??

Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$

On a : $a\le b \Rightarrow a\le b \text{ et } a+1\le b+1$

$\Rightarrow\sqrt{a}\le\sqrt{b} \text{ et } \sqrt{a+1}\le\sqrt{b+1} \Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

Donc : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$; $a\le b\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

Donc par contraposition on déduit que : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\succ\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a\succ b$

Exercice8 : 1) Montrer que : $\forall(a;b)\in\left(]0;+\infty[\right)^2$; $a\times b\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

2) Déduire que : $\forall(a;b;c;d)\in\left(]0;+\infty[\right)^4$; $a\times b\times c\times d\le\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

Solution : 1) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b)\in\left(]0;+\infty[\right)^2$ $a\times b\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4a\times b\le(a+b)^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\ge 4a\times b$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$; (vraie)

Donc : $\forall(a;b)\in\left(]0;+\infty[\right)^2$; $a\times b\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; (vraie)

2) Déduction : Soit : $(a;b;c;d)\in\left(]0;+\infty[\right)^4$

On a : $\forall(a;b)\in\left(]0;+\infty[\right)^2$; $a\times b\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ❶ alors on a aussi : $c\times d\le\left(\frac{c+d}{2}\right)^2$ ❷

❶ ⊗ ❷ $\Rightarrow a\times b\times c\times d\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 \Rightarrow a\times b\times c\times d\le\left((a+b)(c+d)\right)^2\frac{1}{2^4}$

Or : $(a+b)(c+d)\le\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^2$

Donc : $\left((a+b)(c+d)\right)^2\frac{1}{2^4}\le\left((a+b)+(c+d)\right)^4\frac{1}{2^8}\Rightarrow a\times b\times c\times d\le\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

Exercice9 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-x+3$

Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Solution : f est n'est pas pair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}):f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}):f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=4$ et $f(-1)=6$

Donc : $f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc f n'est ni pair ni impair

Exercice10 : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x=y$ et $y=z$ et $z=x$

C'est-à-dire supposant que : $x=y=z$

Comme on a : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$ et $x=y=z$

Alors : $x(x+x)+x(x+x)+x(x+x)=18$

Donc : $2x^2+2x^2+2x^2=18\Rightarrow 6x^2=18\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\mp\sqrt{3}$ contradiction car $x\in\mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Par suite : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Exercice11 : On considère le triangle ABC tel que les longueurs de ses cotés sont : **4a, 3a et 6a** (**a > 0**).

Montrer que ABC n'est pas rectangle.

Solution : Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Soit **:** $a\succ 0$ Par l'absurde, supposons ABC est rectangle.

Donc : d'après Pythagore ; $(6a)^2=(3a)^2+(4a)^2\Rightarrow 36a^2=9a^2+16a^2\Leftrightarrow 11a^2=0\Leftrightarrow a^2=0\Leftrightarrow a=0$

C'est une contradiction car on a : $a\succ 0$

Donc : ABC n'est pas rectangle.

Exercice12 : Soit : $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$

1) Montrer que : le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$: (S) : $\begin{cases}2x-3z\succ 3\\3y-2x\geq 3\\y-z\leq 2\end{cases}$

2) Montrer que : $x+y\succ z\Rightarrow x\succ\frac{z}{2}$ ou $y\succ\frac{z}{2}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : le système (S) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^2$:

Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases}2x-3z\succ 3\\3y-2x\geq 3\\y-z\leq 2\end{cases}$

$$\begin{cases}2x-3z\succ 3 & (1)\\3y-2x\geq 3 & (2)\\y-z\leq 2\end{cases}\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}\begin{cases}3y-3z\succ 6\\y-z\leq 2\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases}y-z\succ 2\\y-z\leq 2\end{cases}\Rightarrow 2\prec y-z\leq 2\Rightarrow 2\prec 2$: Ce qui est contradictoire

Donc : le système (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$

2)Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x+y\succ z$ et $x\leq\frac{z}{2}$ et $y\succ\frac{z}{2}$

$\begin{cases} x \le \frac{z}{2} \\ y \le \frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y \le \frac{z}{2}+\frac{z}{2} \Rightarrow x+y \le z$ Ce qui est contradictoire avec : $x+y \succ z$

Donc : $x+y \succ z \Rightarrow x \succ \frac{z}{2}$ ou $y \succ \frac{z}{2}$

Exercice13 : Montrer que : 1) $\forall n \ge 5\ ; n^2 \prec 2^n$

2) $\forall n \in \mathbb{N};\ 2$ divise $3^n - 1$

3) $\forall n \in \mathbb{N};\ 7$ divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$

4) $\forall n \in \mathbb{N};\ 7$ divise $25^n - 2^{2n}$

Solution : 1) $\forall n \ge 5\ ; n^2 \prec 2^n$

Notons P(n) La proposition : « $n^2 \prec 2^n$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n = 5 : 5^2 = 25$ et $2^5 = 32$ donc $5^2 \prec 2^5$
Donc P(5) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N} ; n \ge 5$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $n^2 \prec 2^n$.
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que $(n+1)^2 \prec 2^{n+1}$ c'est-à-dire : $(n+1)^2 \prec 2^{n+1}$??

Soit : $n \ge 5$: On a : $n^2 \prec 2^n$ alors : $2n^2 \prec 2^{n+1}$

Ainsi, il suffit de montrer que : $(n+1)^2 \prec 2n^2$

C'est-à-dire : $(n+1)^2 - 2n^2 \prec 0$

$(n+1)^2 - 2n^2 = n^2 + 2n + 1 - 2n^2 = -n^2 + 2n + 1$

$= -(n^2 - 2n + 1) + 2 = -(n-1)^2 + 2$

Et comme : $n \ge 5$ alors : $(n-1)^2 \ge 16$

Donc : $-(n-1)^2 + 2 \prec 0$

D'où : $(n+1)^2 - 2n^2 \prec 0$ par suite : $(n+1)^2 \prec 2^{n+1}$

Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\forall n \ge 5\ ; n^2 \prec 2^n$

2) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N};\ 2$ divise $3^n - 1$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2 \times 0$
Alors : 2 divise $3^0 - 1$
Donc P (0) est vraie.
2étapes : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 3^n - 1 = 2k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 3^{n+1} - 1 = 2k'$??
Soit : $n \in \mathbb{N}$
On a : $\exists k \in \mathbb{N} / 3^n - 1 = 2k$ donc : $3 \times (3^n - 1) = 3 \times 2k$

Donc : $3^{n+1} - 3 = 6k$
Donc : $3^{n+1} - 3 + 2 = 6k + 2$
Donc : $3^{n+1} - 1 = 6k + 2$
Donc : $3^{n+1} - 1 = 2(3k+1) = 2k'$ avec $k' = 3k + 1$
Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence : on a : $\forall n \in \mathbb{N};\ 2$ divise $3^n - 1$

3) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N};\ 7$ divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $3^{2\times 0+1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7 = 7 \times 1$

Alors 7 divise $3^{2\times 0+1} + 2^{0+2}$

Donc P (0) est vraie.

2étape : Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k'$??

Soit : $n \in \mathbb{N}$

On a : $\exists k \in \mathbb{N} / 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

Donc : $3^2 \times \left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right) = 3^2 \times 7k$

Donc : $3^{2n+3} + 3^2 \times 2^{n+2} = 9 \times 7k$

Donc : $3^{2n+3} + (7+2) \times 2^{n+2} = 9 \times 7k$

Donc : $3^{2n+3} + 2^{n+3} + 7 \times 2^{n+2} = 9 \times 7k$

Donc : $3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7\left(9 \times k - 2^{n+2}\right)$

Donc : $3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k'$ avec $k' = 9k - 2^{n+2}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence : on a : $\forall n \in \mathbb{N};\ 7$ divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$

4) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N};\ 7$ divise $25^n - 2^{2n}$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $25^0 - 2^{2\times 0} = 1 - 1 = 0 = 7 \times 0$

Alors 7 divise $25^0 - 2^{2\times 0}$

Donc P (0) est vraie.

2étape : Soit $n \in \mathbb{N}$;

Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 25^n - 2^{2n} = 7k$

Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 25^{n+1} - 2^{2n+2} = 7k'$??

On a : $\exists k \in \mathbb{N} / 25^n - 2^{2n} = 7k$

Donc : $25 \times \left(25^n - 2^{2n}\right) = 25 \times 7k$

Donc : $25^{n+1} - 25 \times 2^{2n} = 25 \times 7k$

Donc : $25^{n+1} - (4+21) \times 2^{2n} = 25 \times 7k$

Donc : $25^{n+1} - 2^2 \times 2^{2n} - 21 \times 2^{2n} = 25 \times 7k$

Donc : $25^{n+1} - 2^{2n+2} = 25 \times 7k + 7 \times 3 \times 2^{2n}$

Donc : $25^{n+1} - 2^{2n+2} = 7\left(25 \times k + 3 \times 2^{2n}\right) = 7k'$ avec $k' = 25 \times k + 3 \times 2^{2n} \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence : on a : $\forall n \in \mathbb{N};\ 7$ divise $25^n - 2^{2n}$

Exercice14 : (Récurrence) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2 \times \left(2n^2 - 1\right)$.

Solution : Notons P(n) La proposition "$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2 \times \left(2n^2 - 1\right)$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^3=(2\times1-1)^3=1^3=1$ et $1^2\times(2\times1^2-1)=1\times(2-1)=1$

Donc : $1=1$. Donc P(0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2\times(2n^2-1)$

3étapes : Nous allons montrer que : P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3=(n+1)^2\times\left(2(n+1)^2-1\right)=(n+1)^2\times(2n^2+4n+1)$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3+(2(n+1)-1)^3$ et on a : $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2\times(2n^2-1)$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3=n^2\times(2n^2-1)+(2(n+1)-1)^3=2n^4-n^2+8n^3+12n^2+6n+1=2n^4+8n^3+11n^2+6n+1$

On a aussi :
$(n+1)^2\times(2n^2+4n+1)=(n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)=2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1$

$(n+1)^2\times(2n^2+4n+1)=(n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)=2n^4+8n^3+11n^2+6n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2\times(2n^2-1)$.

Exercice15 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$.

Solution : On va Opérer par disjonction de cas i.e. déterminer un énoncé Q tel que :
Q ⇒ P et non(Q) ⇒ P soient vraies
Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.
Premier cas : $x\succ1$: Alors|x−1|= x−1.
Calculons alors $(x^2-x+1)-(x-1)=x^2-x+1-x+1$

$(x^2-x+1)-(x-1)=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\ge0$ Ainsi $x^2-x+1\ge|x-1|$

Deuxième cas : $x\le1$. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons $(x^2-x+1)+(x-1)=x^2-x+1+x-1=x^2\ge0$

Et donc $x^2-x+1\ge|x-1|$

Conclusion : Dans tous les cas : $x^2-x+1\ge|x-1|$.

Exercice16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante (I): $\sqrt{x-2}\ge x-5$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation (I): $\sqrt{x-2}\ge x-5$

$D=\{x\in\mathbb{R}/x-2\ge0\}=[2;+\infty[$

$x-5\ge0\Leftrightarrow x\ge5$

Soit $x\in[2;+\infty[$ et S l'ensemble des solutions de (I)

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x-2}\ge x-5$

1 cas : si $x\in[2;5[$ alors $x-5\prec0$

Donc : l'Inéquation est vraie pour tout $x\in[2;5[$

Donc $S_1=[2;5[$

2 cas : si $x\in[5;+\infty[$ alors $x-5\geq 0$

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x-2}\geq x-5\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}\right)^2\geq(x-5)^2$

$\Leftrightarrow x-2-(x^2-10x+25)\geq 0\Leftrightarrow -x^2+11x-27\geq 0\Leftrightarrow x^2-11x+27\leq 0$

$x_1=\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\approx 7,3$ et $x_2=\dfrac{11-\sqrt{13}}{2}\approx 3,7$

$\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{11-\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right]$ Donc $S_2=\left[\dfrac{11-\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right]\cap[5;+\infty[=\left[5;\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right]$

Donc : $S=S_1\cup S_2=[2;5[\cup\left[5;\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right]=\left[2;\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right]$

Exercice17 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante : $mx^2-2(m+2)x+m+3=0$

Solution : $mx^2-2(m+2)x+m+3=0$: On va Opérer par disjonction de cas :

1ére cas : $m=0$ L'équation devient : $-4x+3=0$ c'est à dire : $x=\dfrac{3}{4}$ et Par suite : $S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

2ére cas : $m\neq 0$ c'est une équation du second degré :

$\Delta'=b'^2-ac=(m+2)^2-m\times(m+3)=m^2+4m+4-m^2-3m=m+4$

Si : $m=-4$ alors : $\Delta'=0$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\dfrac{-b'}{a}=\dfrac{m+2}{m}=\dfrac{-4+2}{-4}=\dfrac{1}{2}$ par suite : $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Si : $m\succ -4$ ($m\neq 0$) alors : $\Delta'\succ 0$ L'équation admet donc deux solutions :

$x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{m+2-\sqrt{m+4}}{m}$ Et $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{m+2+\sqrt{m+4}}{m}$

Par suite : $S=\left\{\dfrac{m+2-\sqrt{m+4}}{m};\dfrac{m+2+\sqrt{m+4}}{m}\right\}$

Si : $m\prec -4$ alors : $\Delta'\prec 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc : $S=\varnothing$

Exercice18 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{n^2+4n+7}\notin\mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+4n+7}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+4n+7}=m$

$\sqrt{n^2+4n+7}=m\Leftrightarrow n^2+4n+7=m^2\Leftrightarrow n^2+2\times n\times 2+2^2+3=m^2\Leftrightarrow(n+2)^2+3=m^2$

Donc : $(n+2)^2<m^2$ et comme : $(n+3)^2=n^2+6n+9$

Alors : $(n+3)^2-m^2=(n^2+6n+9)-(n^2+4n+7)=2n+2\succ 0$

On a alors : $(n+2)^2<m^2<(n+3)^2$ c'est-à-dire : $n+2<m<n+3$

C'est-à-dire : $n+2<m<(n+2)+1$ et $m\in\mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n+2$ *et* $n+3$

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{n^2+4n+7}\notin\mathbb{N}$

Exercice19 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{Z}:\dfrac{6n+2023}{100}\notin\mathbb{Z}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{6n+2023}{100} \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{Z}$ et $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{6n+2023}{100} = m$

$\frac{6n+2023}{100} = m \Leftrightarrow 6n+2023 = 100m \Rightarrow 2023 = 100m - 6n \Rightarrow 2023 = 2(50m-3n) \Rightarrow 2025 = 2k$ avec $k = 50m - 3n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2023$ est pair

C'est une contradiction car on sait que : 2023 est impair

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{4n+2026} \notin \mathbb{N}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien