1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Série N°5 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

(La correction voir 😊 http://www.xriadiat.com/)

Exercice1 : Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $P_1 : (\exists n \in \mathbb{N}); 95 \prec n^2 \prec 101$

2) $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}); |x| \leq 0$

3) $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}^+); x + \sqrt{x} \succ 2$

4) $P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}^*); x + \frac{1}{x} \geq 2$

5) $P_5 : (\exists x \in \mathbb{Q}); x^2 = 9$

6) $P_6 : (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}); x - y = 3$

7) $P_7 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in]-\infty;1[); 3x^2y - x + y = 0$

8) $P_8 : (\forall x \in [0;2])\left(\exists y \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\right); xy - x + 2y - 1 = 0$

9) $P_9 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x \prec y^2$

10) $P_9 : (\exists! x \in [-1;0]) : x^2 + 4x + 1 = 0$

Exercice2 : Soient P et Q deux propositions

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) Donner la négation de la proposition : $P \Rightarrow Q$

2) Donner la valeur de vérité de : $(1=2) \Rightarrow (2=3)$

Exercice3 : On considère les assertions suivantes : P ;$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : x \geq 2\sqrt{x} - 1$;

Q ;$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : xy \neq x$

1) Ecrire la négation de P et Q 2) Déterminer la valeur de vérité de P et Q

Exercice4 : Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

a) Il existe un nombre rationnel dont le carré vaut deux.
b) La somme de deux nombres positifs quelconques est un nombre positif.
c) Le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre positif.
d) L'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ admet une solution réelle.
e) Tout entier naturel est pair ou impair.
f) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.
g) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.
h) Si un nombre réel x inférieur de -1 alors il est strictement négatif.
i) Le produit de deux réels est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul.
j) L'équation $\sin x = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice5 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ $x \in [0;1] \Rightarrow \frac{1}{x+1} \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

2) Montrer que : $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$ $\Rightarrow \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| \leq |x - y|$

Exercice6 : 1) Montrer que :$(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall y \in \mathbb{R}^+$ $: x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1 \Leftrightarrow x + y = 0$

4) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $: \sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\forall y \in \mathbb{R}^{*+}$ $: x \prec y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \prec \frac{2x+5y}{5x+2y} \prec \frac{y}{x}$

Exercice7 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$

$x \neq y \ et \ x+y \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-x+1} \neq \sqrt{y^2-y+1}$

2) Montrer que : $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a} \succ \sqrt{b+1}+\sqrt{b} \Rightarrow a \succ b$

Exercice8 : 1) Montrer que : $\forall (a;b) \in (]0;+\infty[)^2$; $a \times b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

2) Déduire que : $\forall (a;b;c;d) \in (]0;+\infty[)^4$ **;** $a \times b \times c \times d \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

Exercice9 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-x+3$

Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Exercice10 : Soient $(x;y;z) \in \mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Montrer que : $x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $z \neq x$

Exercice11 : On considère le triangle ABC tel que les longueurs de ses cotés sont : **4a**, **3a et 6a** (**a > 0**).

Montrer que ABC n'est pas rectangle.

Exercice12 : Soit : $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$

1) Montrer que : le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$: (S) : $\begin{cases} 2x-3z \succ 3 \\ 3y-2x \geq 3 \\ y-z \leq 2 \end{cases}$

2) Montrer que : $x+y \succ z \Rightarrow x \succ \frac{z}{2}$ ou $y \succ \frac{z}{2}$

Exercice13 : Montrer que : 1) $\forall n \geq 5$; $n^2 \prec 2^n$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$; 2 divise 3^n-1

3) $\forall n \in \mathbb{N}$; 7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$; 7 divise 25^n-2^{2n}

Exercice14 : (Récurrence) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2 \times (2n^2-1)$.

Exercice15 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2-x+1$.

Exercice16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante (I) : $\sqrt{x-2} \geq x-5$

Exercice17 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$mx^2-2(m+2)x+m+3=0$

Exercice18 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^2+4n+7} \notin \mathbb{N}$

Exercice19 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{Z} : \frac{6n+2023}{100} \notin \mathbb{Z}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien