1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°4 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la négation des propositions suivantes et dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

$P:(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{1+x^2}-|x|\succ 0$

$Q:\left(\forall y\in\mathbb{R}^+\right)(\forall x\in\mathbb{R});y\succ x$

$R:\left(\exists a\in\mathbb{R}^*\right)(\forall x\in\mathbb{R});x^2-ax+a^2=0$

$S:(\forall x\in\mathbb{R}):\left(x^2-|x|+1\geq 0\right)\ et\ |-1\leq x\leq 1|$

$T:\left(\forall x\in[1;+\infty[\right):x^2+x-2\geq 0$

$U:(\forall x\in\mathbb{R}):(x\geq 0)\ ou\ (x\leq 0)$

Solution :1) $P:(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{1+x^2}-|x|\geq 0$; $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});\sqrt{1+x^2}-|x|\leq 0$

Soit : $x\in\mathbb{R}$

On a : $x^2+1\succ x^2$ donc : $\sqrt{x^2+1}\succ\sqrt{x^2}$

Donc : $\sqrt{x^2+1}\succ|x|$

Donc : $\sqrt{x^2+1}-|x|\succ 0$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{1+x^2}-|x|\geq 0$ par suite : P:est vraie

$Q:\left(\forall y\in\mathbb{R}^+\right)(\forall x\in\mathbb{R});y\succ x$; $\overline{Q}:\left(\exists y\in\mathbb{R}^+\right)(\exists x\in\mathbb{R});y\leq x$

$\overline{Q}:\left(\exists y\in\mathbb{R}^+\right)(\exists x\in\mathbb{R});y\leq x$ est vraie : $\left(\exists y\in\mathbb{R}^+\right)(\exists x\in\mathbb{R});1\leq 2$

Par suite : Q:est fausse

$R:\left(\exists a\in\mathbb{R}^*\right)(\forall x\in\mathbb{R});x^2-ax+a^2=0$

Montrons que : $\overline{R}:\left(\forall a\in\mathbb{R}^*\right)(\exists x\in\mathbb{R});x^2-ax+a^2\neq 0$ est vraie

Soit : $a\in\mathbb{R}^*$: x^2-ax+a^2 : $\Delta=a^2-4a^2=-3a^2\prec 0$

Donc : $x^2-ax+a^2\neq 0$

Donc : $\overline{R}$: est vraie par suite : R:est fausse

$S:(\forall x\in\mathbb{R}):\left(x^2-|x|+1\geq 0\right)\ et\ |-1\leq x\leq 1|$ est fausse car $(\forall x\in\mathbb{R}):|-1\leq x\leq 1|$ est fausse

$T:\left(\forall x\in[1;+\infty[\right):x^2+x-2\geq 0$

Soit : $x\in[1;+\infty[$

Donc : $x\geq 1$ alors : $x^2\geq 1$ et $x\geq 1$

$x^2+x\geq 2$ c'est-à-dire : $x^2+x-2\geq 0$

Donc : T: $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right):x^2+x-2\geq 0$ est vraie

Alors : $\overline{T}$: $\left(\exists x\in[1;+\infty[\right):x^2+x-2\prec 0$ est fausse

$U:(\forall x\in\mathbb{R}):(x\geq 0)\ ou\ (x\leq 0)$ est vraie

$\overline{U}:(\exists x\in\mathbb{R}):(x\prec 0)\ et\ (x\succ 0)$ est fausse

Exercice2: Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

1) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right); \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow$ ....

2) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right); x^2 \leq 16 \Leftrightarrow$ ....

3) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*}\right); \frac{1}{x} \prec x \Leftrightarrow$ ....

4) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right); x^2 \leq x \Leftrightarrow$ ....

Solution : 1) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right); \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 > 2^2 \Leftrightarrow x > 4 \Leftrightarrow x \in \left]4;+\infty\right[$

2) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right); x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{16} \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in \left[-4;4\right]$

3) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*}\right); \frac{1}{x} \prec x \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} \succ 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} \succ 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

Remarque : On utilise le tableau de signe pour trouver les solutions des inéquations

4) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right); x^2 \leq x \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0;1]$

Exercice3 : Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1) Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$
2) Le graphe de f coupe la droite d'équation y = x.
3) Pour tout point M du plan (P), M est sur le cercle C de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de ΩM à vaut R.
4) L'équation $x^2 = 3$ n'admet aucune solution rationnelle.
5) Il existe un réel plus petit que tous les réels.
6) Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif p tel que : $p \leq x \prec p+1$
7) Tout entier naturel : s'il est divisible par 4 alors c'est un nombre pair.

Solution : 1) $(\exists x \in \mathbb{R}); D(x) = 0$

2) $(\exists x \in \mathbb{R}); f(x) = x$

3) $(\forall M \in (P)); M \in C(\Omega; R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

4) $(\forall x \in \mathbb{Q}); x^2 \neq 3$

5) $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}); m \leq x$

6) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! p \in \mathbb{Z}); p \leq x \prec p+1$

7) $(\forall n \in \mathbb{N}): 4/n \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})/ n = 2k$

Exercice4 : Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

Nier les assertions suivantes :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) \neq 0$

2) $(\forall M \succ 0);(\exists A \geq 0); \forall x \succ A; f(x) \succ M$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \succ 0 \Rightarrow x \leq 0$

4) $(\forall \varepsilon \succ 0);(\exists \alpha \succ 0)\left(\forall (x;y) \in I^2\right): |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Solution : 1) $(\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) = 0$

2) $(\exists M \succ 0);(\forall A \geq 0); \exists x \succ A; f(x) \leq M$

3) $(\exists x \in \mathbb{R}); f(x) \succ 0 \text{ et } x \succ 0$

4) $(\exists \varepsilon \succ 0);(\forall \alpha \succ 0)\left(\exists (x;y) \in I^2\right): |x-y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \succ \varepsilon$

Exercice5 : Montrer que : $\forall x \geq 1 \; ; \forall y \geq 1 : x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y = 1$.

Solution : Soient : $x \geq 1 \quad et \quad y \geq 1$

$x^2+y^2+xy-x-y-1=0 \Rightarrow x^2+xy-(x+y)+y^2-1^2=0 \quad \Rightarrow x(x+y)-(x+y)+(y-1)(y+1)=0$

$\Rightarrow (x+y)(x-1)+(y-1)(y+1)=0$

On a : $x \geq 1 \quad et \quad y \geq 1$ Alors : $x-1 \geq 0 \quad et \quad y-1 \geq 0$ et $x+y \geq 2 \succ 0$

Donc : $(x+y)(x-1) \geq 0 \quad et \ (y-1)(y+1) \geq 0$

Or on sait que :$\left(\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Rightarrow a=0 \quad et \quad b=0$

Donc : $(x+y)(x-1)=0 \quad et \ (y-1)(y+1)=0$ Mais : $x+y \succ 0$ et $y \geq 1$

Donc : $x-1=0 \quad et \quad y-1=0$

Donc : $x=1 \quad et \quad y=1$

Exercice6 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$

$x \neq y \ et \ x \times y \neq 2 \Rightarrow x^2y-xy^2+2x-2y \neq 0$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition : Montrons que :

$x^2y-xy^2+2x-2y=0 \Rightarrow x=y \ ou \ x \times y=2$??

Soient : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

On a : $x^2y-xy^2+2x-2y=0$

$\Rightarrow xy(x-y)+2(x-y)=0 \Rightarrow (x-y)(xy+2)=0 \Rightarrow x-y=0 \quad ou \quad x \times y+2=0 \Rightarrow x=y \quad ou \quad x \times y=-2$

Donc : $x^2y-xy^2+2x-2y=0 \Rightarrow x=y \ ou \ x \times y=2$

Donc par contraposition on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$

$x \neq y \ et \ x \times y \neq 2 \Rightarrow x^2y-xy^2+2x-2y \neq 0$

Exercice7 : Montrer que : $\forall x \geq 0 \ ; \forall y \geq 1; \forall z \geq 2:$.

$x \neq 1 \ ou \ y \neq 2 \ ou \ z \neq 3 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2} \neq \frac{x+y+z}{2}$

Solution : Par contraposition montrons que : $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2} \Rightarrow x=1 \ et \ y=2 \ et \ z=3$?

Soient : $x \geq 0 \quad et \quad y \geq 2 \, et \quad z \geq 3$

$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}+2\sqrt{z-2}=x+y+z$

$\Rightarrow x-2\sqrt{x}+y-2\sqrt{y-1}+z-2\sqrt{z-2}=0$

$\Rightarrow \left(\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1\right)-1+\left(\sqrt{y-1}^2-2\sqrt{y-1}+1\right)+\left(\sqrt{z-2}^2-2\sqrt{z-2}+1\right)+1=0$

$\Rightarrow \left(\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1\right)+\left(\sqrt{y-1}^2-2\sqrt{y-1}+1\right)+\left(\sqrt{z-2}^2-2\sqrt{z-2}+1\right)=0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2=0 \ et \ \left(\sqrt{y-1}-1\right)^2=0 \ et \ \left(\sqrt{z-2}-1\right)^2=0$

Car $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$ et $\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2 \geq 0$ et $\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x}=1 \ et \ \sqrt{y-1}=1 \ et \ \sqrt{z-2}=1 \Rightarrow x=1 \ et \ y-1=1 \ et \ z-2=1 \Rightarrow x=1 \ et \ y=2 \ et \ z=3$

Par contraposition en déduit que : $x \neq 1 \ ou \ y \neq 2 \ ou \ z \neq 3 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2} \neq \frac{x+y+z}{2}$

Exercice8 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=5 \Leftrightarrow x=1$.

Solution : Soient : $x \in \mathbb{R}^+$ on va raisonner par équivalence

$\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}\right)^2=5^2 \quad \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8}\right)^2+2\sqrt{x+8}\sqrt{x+3}+\left(\sqrt{x+3}\right)^2=25$

$\Leftrightarrow x+8+2\sqrt{x+8}\sqrt{x+3}+x+3=25 \Leftrightarrow 2x+2\sqrt{(x+8)(x+3)}=14 \Leftrightarrow x+\sqrt{(x+8)(x+3)}=7$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+8)(x+3)}=7-x$ et $x\leq 7 \Leftrightarrow (x+8)(x+3)=(7-x)^2 \Leftrightarrow x^2+3x+8x+24=49-14x+x^2$

$\Leftrightarrow 25x=49-24 \Leftrightarrow 25x=25 \Leftrightarrow x=1$

Exercice9 : Montrer que : $\forall x\succ 0$; $x+\frac{1}{x}\geq 2$

Solution : Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x\succ 0$; $x+\frac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ Et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ est une proposition vraie

Alors $\forall x\succ 0$; $x+\frac{1}{x}\geq 2$

Exercice10 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-x+3$

Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Solution : f est n'est pas pair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=4$ et $f(-1)=6$ donc $f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc f n'est ni pair ni impair

Exercice11 : Montrer que le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$: $(S): \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3y-2x=3 \end{cases}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : le système (S) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^2$: Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} 2x-3y=3 & (1) \\ 3y-2x=3 & (2) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} 0=6$

Ce qui est contradictoire par suite : le système (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$

Exercice12 : Montrer par l'absurde que : $\forall x\in\mathbb{R}: \frac{2x^2+1}{1+x^2}\neq 2$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists x\in\mathbb{R}: \frac{2x^2+1}{1+x^2}=2$

$\frac{2x^2+1}{1+x^2}=2 \Leftrightarrow 2x^2+1=2(1+x^2) \Leftrightarrow 2x^2+1=2+2x^2 \Leftrightarrow 1=2$! C'est une contradiction car on sait que : $2\neq 1$

Ceci signifie : $\forall x\in\mathbb{R}: \frac{2x^2+1}{1+x^2}\neq 2$

Exercice13 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\sqrt{\frac{n}{n+1}}\notin\mathbb{N}$

Solution : On a : $n\in\mathbb{N}^*$ donc $0\prec n\prec n+1 \Rightarrow 0\prec\frac{n}{n+1}\prec 1 \Rightarrow \sqrt{0}\prec\sqrt{\frac{n}{n+1}}\prec\sqrt{1} \Rightarrow 0\prec\sqrt{\frac{n}{n+1}}\prec 1$

Donc : $\sqrt{\frac{n}{n+1}}\notin\mathbb{N}$ car un nombre strictement compris entre deux entiers consécutifs :0 et 1 ne peut pas être entier

Exercice14 : Montrer par l'absurde que : $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{9n^2+13n+5}\notin\mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{9n^2+13n+5}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{9n^2+13n+5}=m$

$\sqrt{9n^2+13n+5}=m \Leftrightarrow 9n^2+13n+5=m^2 \Leftrightarrow (3n)^2+2\times 3n\times 2+2^2+n+1=m^2 \Leftrightarrow (3n+2)^2+n+1=m^2$

Donc : $(3n+2)^2<m^2$ et comme : $(3n+3)^2=9n^2+18n+9$

Alors : $(3n+3)^2-m^2=(9n^2+18n+9)-(9n^2+13n+5)=5n+4\succ 0$

On a alors : $(3n+2)^2<m^2<(3n+3)^2$ c'est-à-dire : $3n+2<m<3n+3$

C'est-à-dire : $3n+2<m<(3n+2)+1$ et $m\in\mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $3n+2$ *et* $3n+3$ Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{9n^2+13n+5}\notin\mathbb{N}$

Exercice15 : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Montrer que : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{Q}^3$ tels que : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x=y$ et $y=z$ et $z=x$

C'est-à-dire supposant que : $x=y=z$

Comme on a : $x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=18$ et $x=y=z$ alors : $x(x+x)+x(x+x)+x(x+x)=18$

Donc : $2x^2+2x^2+2x^2=18 \Rightarrow 6x^2=18 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\mp\sqrt{3}$ contradiction car $x\in\mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Par suite : $x\neq y$ ou $y\neq z$ ou $z\neq x$

Exercice16 : Montrer par récurrence que : pour tout entier $n\geq 4$: $2^n\geq n^2$

Solution : Notons P(n) La proposition : « $2^n\geq n^2$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=4: 2^4=16$ et $4^2=16$ donc $2^4\geq 4^2$

Donc P(4) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\geq 4$: Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\geq n^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\geq (n+1)^2$??

On a : $(n+1)^2=n^2+2n+1$ et $n\geq 4 \Rightarrow n\succ 2 \Rightarrow n\times n\succ 2n \Rightarrow n^2\succ 2n \Rightarrow n^2-1\geq 2n \Rightarrow n^2\geq 2n+1$

$\Rightarrow n^2+n^2\geq n^2+2n+1 \Rightarrow 2n^2\geq (n+1)^2$

On a : $2^n\geq n^2 \Rightarrow 2\times 2^n\geq 2n^2 \Rightarrow 2^{n+1}\geq 2n^2\geq (n+1)^2 \Rightarrow 2^{n+1}\geq (n+1)^2$

Donc P(n+1) est vraie.

On conclut par récurrence que : $\forall n\geq 4$: $2^n\geq n^2$

Exercice17 : Montrer que : $\forall n\geq 2$; $9 / 4^n-3n-1$

Solution : Montrons que : $\forall n\geq 2: \exists k\in\mathbb{N} / 4^n-3n-1=9k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=2 nous avons $4^2-6-1=9$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$

Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 4^n-3n-1=9k$ donc $4^n=9k+3n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N} / 4^{n+1}-3(n+1)-1=9k'$??

$4^{n+1}-3(n+1)-1=4\times 4^n-3n-3-1=4\times(9k+3n+1)-3n-4=4\times 9k+12n+4-3n-4$

$=4\times 9k+9n=9(4k+n)=9k'$ avec $k'=4k+n\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\geq 2$; $9/4^n-3n-1$

Exercice18 : Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

Solution : Notons P(n) La proposition : "$\sum_{p=1}^{n}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : "$\sum_{p=1}^{1}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=1\times\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{4}{5}$" et

"$\frac{4\times 5^{1+1}-(5+1)4^{1+1}}{5^1}=\frac{100-96}{5^1}=\frac{4}{5}$"

Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}$;

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : "$\sum_{p=1}^{n}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$"

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : "$\sum_{p=1}^{n+1}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\frac{4\times 5^{n+2}-(6+n)4^{n+1}}{5^{n+1}}$" ??

On a : $\sum_{p=1}^{n+1}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\sum_{p=1}^{n}p\left(\frac{4}{5}\right)^p+(n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence :

"$\sum_{p=1}^{n}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$"

Donc : $\sum_{p=1}^{n+1}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}+(n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}=\frac{4\times 5^{n+2}-5(5+n)4^{n+1}+(n+1)4^{n+1}}{5^{n+1}}$

$=\frac{4\times 5^{n+2}+(-25-5n+n+1)4^{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{4\times 5^{n+2}-(24+4n)4^{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{4\times 5^{n+2}-(6+n)4^{n+2}}{5^{n+1}}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n}p\left(\frac{4}{5}\right)^p=\frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

Exercice19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante : $3x|x+1|+x-2=0$

Solution : $3x|x+1|+x-2=0$

On va Opérer par disjonction de cas :

Si $x\geq -1$ alors $x+1\geq 0$ donc : $|x+1|=x+1$

Donc : l'équation devient : $3x(x+1)+x-2=0$ qui Signifie que : $3x^2+4x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=4+2\times 3=10\succ 0$

Comme $\Delta'>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$ Mais : $x_1=-1\notin[-1;+\infty[$ donc : $S_1=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

Si $x \leq -1$ alors $x+1 \leq 0$ donc : $|x+1| = -x-1$

Donc : l'équation devient : $-3x(x+1)+x-2=0$ qui signifie que : $-3x^2-2x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$ de l'équation : $\Delta' = b'^2 - ac = 1-6 = -5 \prec 0$

Comme $\Delta' \prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions donc : $S_2 = \varnothing$.

Par suite : $S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \dfrac{-2+\sqrt{10}}{3} \right\}$

Exercice20 : Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{x-3} = -x+5$

Solution : Remarque : La relation $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x-3 \geq 0$ Signifie que : $x \geq 3$

L'équation est donc définie sur : $D_E = [3,+\infty[$

Méthode1 : Soit $x \in D_E = [3,+\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{x-3} = -x+5 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}^2 = (-x+5)^2$ et $-x+5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x-3 = x^2-10x+25$ et $-x \geq -5 \Leftrightarrow x^2-11x+28=0$ et $x \leq 5$

Le discriminant de : $x^2-11x+28=0$ est : $\Delta = (-11)^2 - 4\times1\times28 = 121-112 = 9 > 0$ et ses solutions sont :

$x_1 = \dfrac{11-\sqrt{9}}{2\times1} = \dfrac{8}{2} = 4 \in D_E$ et $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{9}}{2\times1} = \dfrac{14}{2} = 7 \notin D_E$

$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x = 4 \in D_E$

Par conséquent : $S = \{4\}$

Méthode2 : On va Opérer par disjonction de cas : Soit $x \in D_E = [3,+\infty[$

<u>Premier cas :</u> Si $-x+5 \prec 0$ c'est-à-dire si $x \in]5,+\infty[$

Alors : pas possible (négatif = positifs…)

Donc : $S_1 = \varnothing$

<u>2 ieme cas :</u> Si $-x+5 \geq 0$ c'est-à-dire si $x \in [3;5]$

$\sqrt{x-3} = -x+5 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}^2 = (-x+5)^2 \Leftrightarrow x-3 = x^2-10x+25 \Leftrightarrow: x^2-11x+28=0$

Le discriminant de : $x^2-11x+28=0$ est : $\Delta = (-11)^2 - 4\times1\times28 = 121-112 = 9 > 0$ et ses solutions sont :

$x_1 = \dfrac{11-\sqrt{9}}{2\times1} = \dfrac{8}{2} = 4 \in [3;5]$ et $x_1 = \dfrac{11+\sqrt{9}}{2\times1} = \dfrac{14}{2} = 7 \notin [3;5]$

$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x = 4 \in D_E$

Par suite : $S_2 = \{4\}$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 = \{4\}$

Exercice21 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : x^6 - x + 1 \succ 0$.

Solution : On va Opérer par disjonction de cas i.e. déterminer un énoncé Q tel que :
Q ⇒ P et non(Q) ⇒ P soient vraies

Soit $x \in \mathbb{R}$: $x^6 - x + 1 = x(x^5-1)+1$

Nous distinguons 3 cas :

<u>Premier cas :</u> $x \succ 1$ Alors : $x^5 \succ 1$ donc $x^5 - 1 \succ 0$

$x^5 - 1 \succ 0$ et $x \succ 1 \Rightarrow x(x^5-1) \succ 0 \Rightarrow x(x^5-1)+1 \succ 0+1 \Rightarrow x(x^5-1)+1 \succ 1 \succ 0$

$\Rightarrow x\left(x^5-1\right)+1\succ 0 \Rightarrow x^6-x+1\succ 0$

<u>Deuxième cas :</u> $x\prec 1$ Alors : $1-x\succ 0$ et $x^6\geq 0$

Donc : $x^6-x+1\succ 0$

<u>Troisième cas :</u> $x=1$

$x^6-x+1=1^6-1+1=1\succ 0$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R} : x^6-x+1\succ 0$.

Exercice22 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2-2(m+1)x+4=0$; (E)

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^2-2(m+1)x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-2(m+1)x+4=0$ est : $\Delta=\left[-2(m+1)\right]^2-4\times 1\times 4=(2m+2)^2-16$

$\Delta=(2m+2)^2-4^2=(2m+2-4)(2m+2+4)=(2m-2)(2m+6)=4(m-1)(m+3)$

On cherche le tableau de signe de l'expression : $\Delta=4(m-1)(m+3)$

m	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(m-1)(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On va Opérer par disjonction de cas :

1ére cas : $m\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ on a ; $\Delta=4(m-1)(m+3)>0$:

Donc : l'Equation (E) admet deux solutions réelles distinctes x_1 *et* x_2 telles que :

$x_1=\frac{2(m+1)-\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)}$ et $x_2=\frac{2(m+1)+\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}$

Donc : $S=\left\{(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)};(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}\right\}$

2ére cas : $m\in\left]-3;1\right[$ on a $\Delta=4(m-1)(m+3)<0$:

Donc : L'équation n'admet pas de solutions

Donc : $S=\varnothing$

3ére cas : $m=1$: on a $\Delta=4(1-1)(1+3)=0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2\times 1}=m+1=2$

Donc : $S=\{2\}$

4ére cas : $m=-3$: on a $\Delta=4(-3-1)(-3+3)=0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2\times 1}=-3+1=-2$

Donc : $S=\{-2\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien