1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°3 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :
1) 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
2) 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.
3) $(\exists x\in\mathbb{R}; x+1=0)$ *et* $(\exists x\in\mathbb{R}; x+2=0)$
4) $(\forall x\in\mathbb{R}; x+1\neq 0)$ *ou* $(\forall x\in\mathbb{R}; x+2\neq 0)$
5"$(\exists x\in\mathbb{R}^*)(\forall y\in\mathbb{R}^*)(\forall z\in\mathbb{R}^*): z-xy=0$"
6) "$(\forall y\in\mathbb{R}^*)(\exists x\in\mathbb{R}^*)(\forall z\in\mathbb{R}^*): z-xy=0$"
7) "$(\forall y\in\mathbb{R}^*)(\forall z\in\mathbb{R}^*)(\exists x\in\mathbb{R}^*): z-xy=0$"
8) "$(\forall a\in\mathbb{R})(\forall\varepsilon\succ 0): |a|\prec\varepsilon$"
9) "$(\forall\varepsilon\succ 0)(\exists a\in\mathbb{R}): |a|\prec\varepsilon$"
10) « 89 est un nombre premier »
11) « $(25^3+24^3)^7$ est impair »
12) « Le nombre de diviseurs positifs de 72 est 12 diviseurs »

Solution :1) Cette proposition est fausse, car 2 ne divise pas 167.
2)Cette proposition est vraie, car 136 est un multiple de 17.
3)Cette proposition est vraie car $(\exists x\in\mathbb{R}; x+1=0)$ est vraie (il suffit de prendre $x=-1$) et de la même façon $(\exists x\in\mathbb{R}; x+2=0)$ est vraie (il suffit de prendre $x=-2$).
4)Cette proposition est fausse, par exemple car il s'agit de la négation de la proposition 3, qui est vraie.
5) P"$(\exists x\in\mathbb{R}^*)(\forall y\in\mathbb{R}^*)(\forall z\in\mathbb{R}^*): z-xy=0$" alors : $\overline{P}$"$(\forall x\in\mathbb{R}^*)(\exists y\in\mathbb{R}^*)(\exists z\in\mathbb{R}^*): z-xy\neq 0$"
Soit : $x\in\mathbb{R}^*$: $(\exists y=1\in\mathbb{R}^*)(\exists z=2x): 2x-x=x\neq 0$"
Alors : $\overline{P}$"$(\forall x\in\mathbb{R}^*)(\exists y\in\mathbb{R}^*)(\exists z\in\mathbb{R}^*): z-xy\neq 0$" est vraie
Par suite P est fausse.
6) P"$(\forall y\in\mathbb{R}^*)(\exists x\in\mathbb{R}^*)(\forall z\in\mathbb{R}^*): z-xy=0$"
Cette proposition est fausse. Prenons n'importe quel y dans $\mathbb{R}^*$ On voudrait trouver x dans $\mathbb{R}^*$ tel que, pour tout z dans $\mathbb{R}^*$ on ait $z=xy$ Bien sûr, ce n'est pas possible, car le x que l'on choisit devrait convenir à toute valeur de z, ce qui n'est pas possible car il suffit de considérer un z différent de xy
7)Cette proposition est vraie, car on peut choisir x une fois y et z fixés. On choisit alors $x=\frac{z}{y}$
8)La proposition est vraie, il suffit de prendre $a=0$ (convient pour toute valeur de $\varepsilon\succ 0$).
9)Cette proposition est "évidemment" vraie car elle est plus faible que la précédente (on peut choisir a après $\varepsilon\succ 0$).
10) « 89 est un nombre premier »
Cette assertion est vraie car : $\sqrt{89}\approx 9,4$
Les nombres premier inferieurs ou égale à : $9,4$ sont : 2, 3, 5 et 7

Et 89 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7, donc 89 est premier.

11) « $\left(25^3+24^3\right)^7$ est impair »

Cette proposition est vraie car : 24^3 est paire car le produit de nombres pairs et 25^3 est impair car le produit de nombres impairs.

Donc : 25^3+24^3 c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair

Et par suite : $\left(25^3+24^3\right)^7$ est impair car le produit de nombres impairs.

12) « Le nombre de diviseurs positifs de 72 est 12 diviseurs »

Cette proposition est vraie car : La décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel 72 est : $72 = 2^3 \times 3^2$

Il y a : $(3+1)\times(2+1) = 4 \times 3 = 12$ diviseurs

Exercice2 : Soit P *et* Q deux propositions.

Montrer que les propositions : " $non(P \Rightarrow Q)$ " et " P *et* $\overline{Q}$ "sont équivalentes.

Solution : Il suffit d'établir les tables de vérité de ces deux propositions et de vérifier qu'elles sont identiques.

On a d'une part :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$non(P \Rightarrow Q)$
F	F	V	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	V	V	F

D'autre part :

P	Q	$\overline{Q}$	" P *et* $\overline{Q}$ "
F	F	V	F
F	V	F	F
V	F	V	V
V	V	F	F

Les deux propositions sont bien équivalentes!

Exercice3 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P: « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R});3x^2-xy+4y^2 \neq 0$ »

2) Q: « $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R});x-y=1 \Rightarrow x \succ 1$ »

3) R: « $(\forall n \in \mathbb{N})/\sqrt{n^2+2n} \notin \mathbb{N}$ »

Solution : 1) P: « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R});3x^2-xy+4y^2 \neq 0$ »

Pour : $x=1 \in \mathbb{R}$: $3\times1^2-1y+4y^2=4y^2-y+3$

$\Delta=(-1)^2-48=-47 \prec 0$ donc : $4y^2-y+3=0$ n'a pas solution c'est-à-dire : $4y^2-y+3 \neq 0$

Alors P: est vraie

$\overline{P}$: « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R});3x^2-xy+4y^2=0$ »

2) Q: « $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R});x-y=1 \Rightarrow x \succ 1$ »

$\overline{Q}$: « $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})/x-y=1 \text{ et } x \leq 1$ »

Pour : $x=0$ et $y=-1$ on a : $x-y=0-(-1)=1 \quad et \quad 0 \leq 1$

Alors la proposition $\overline{Q}$:est vraie et par suite : Q: Fausse

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N})/\sqrt{n^2+2n}\notin\mathbb{N}$ »

$\overline{R}$: « $(\exists n\in\mathbb{N})/\sqrt{n^2+2n}\in\mathbb{N}$ »

Pour : $n=0$: $\sqrt{0^2+2\times0}=0\in\mathbb{N}$

Alors la proposition $\overline{R}$:est vraie et par suite : R: Fausse

Soit : $x\in\mathbb{R}$: on peut toujours trouver un nombre entiers relatif donc rationnel y inferieur ou égal a y

il suffit de prendre : $E(x)\in\mathbb{Q}$

3) $\overline{R}$: « $(\forall y\in\mathbb{Q})(\exists x\in\mathbb{R})/x\neq y\ et\ x\leq y$ »

Soit : $y\in\mathbb{Q}$ on prend : $x=y-1\in\mathbb{R}$: $x\neq y\ et\ x\leq y$

Alors la proposition $\overline{R}$: est vraie et par suite : R Fausse

Exercice4 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;|x-1|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\leq\frac{1}{4}$

Solution : On a : $|x-1|\leq\frac{1}{2}\ \Rightarrow-\frac{1}{2}\leq x-1\leq\frac{1}{2}\ \Rightarrow-\frac{1}{2}+1\leq x\leq\frac{1}{2}+1\Rightarrow\boxed{\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}}$

On a : $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$ donc : $1\leq 2x\leq 3$ par suite : $2\leq 2x+1\leq 4$ Alors : $\boxed{\frac{1}{4}\leq\frac{1}{2x+1}\leq\frac{1}{2}}$

On a : $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|=\left|(x-1)\times\frac{1}{2x+1}\right|=|x-1|\times\left|\frac{1}{2x+1}\right|$

On a aussi : $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{2x+1}\leq\frac{1}{2}$ et puisque $-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{4}$ donc : $-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2x+1}\leq\frac{1}{2}$ et donc $\left|\frac{1}{2x+1}\right|\leq\frac{1}{2}$

On a donc : $\begin{cases}\left|\frac{1}{2x+1}\right|\leq\frac{1}{2}\\|x-1|\leq\frac{1}{2}\end{cases}$ ce qui donne : $|x-1|\times\left|\frac{1}{2x+1}\right|\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $|x-1|\times\left|\frac{1}{2x+1}\right|\leq\frac{1}{4}$

Donc : : $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\leq\frac{1}{4}$

Exercice5 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}\ :x+y=1+xy\Rightarrow x=1\ ou\ y=1$.

Solution : Soient : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

$x+y=1+xy\ \Rightarrow x-xy+y-1=0\Rightarrow x(1-y)-(1-y)=0$

$\Rightarrow(1-y)(x-1)=0\Rightarrow 1-y=0\ ou\ x-1=0\Rightarrow y=1\,ou\ x=1$

Exercice6 : Soient : $x\in\mathbb{R}^+\quad et\quad y\in\mathbb{R}^+$

Montrer que : $x\neq y\ et\ xy\neq 4\Rightarrow\frac{\sqrt{x}}{x+2}\neq\frac{\sqrt{y}}{y+2}$

Solution : Par contraposition montrons que : $\frac{\sqrt{x}}{x+2}=\frac{\sqrt{y}}{y+2}\Rightarrow x=y\ ou\ xy=4$

Soient : $x\in\mathbb{R}^+\quad et\quad y\in\mathbb{R}^+$

$\frac{\sqrt{x}}{x+2}=\frac{\sqrt{y}}{y+2}\Rightarrow(y+2)\sqrt{x}=(x+2)\sqrt{y}\Rightarrow y\sqrt{x}+2\sqrt{x}=x\sqrt{y}+2\sqrt{y}$

$\Rightarrow y\sqrt{x}-x\sqrt{y}+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}=0\ \Rightarrow\sqrt{xy}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)-2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0\ \Rightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}-2\right)=0$

$\Rightarrow \sqrt{y}-\sqrt{x}=0 \ ou \ \sqrt{xy}-2=0 \ \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x} \ ou \ \sqrt{xy}=2 \ \Rightarrow y=x \ ou \ xy=4$

Donc : $\frac{\sqrt{x}}{x+2}=\frac{\sqrt{y}}{y+2} \Rightarrow x=y \ ou \ xy=4$

Par contraposition on déduit que : $x \neq y \ et \ xy \neq 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+2} \neq \frac{\sqrt{y}}{y+2}$

Exercice7 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$: $x \neq y \ et \ x \times y \neq 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow x=y \ ou \ x \times y=1$??

Soient : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

On a : $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow x\left(y^2+y+1\right)=y\left(x^2+x+1\right)$

$\Rightarrow xy^2+xy+x=yx^2+yx+y \Rightarrow xy^2-yx^2+x-y=0 \Rightarrow xy(y-x)-(y-x)=0$

$\Rightarrow (y-x)(xy-1)=0 \Rightarrow y-x=0 \ \ ou \ \ x \times y-1=0 \ \Rightarrow x=y \ \ ou \ \ x \times y=1$

Donc : $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow x=y \ ou \ x \times y=1$

Donc par contraposition on déduit que : $x \neq y \ et \ x \times y \neq 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$

Exercice8 : Montrer que : $\forall x \geq 1 \ ; \forall y \geq 4 : \sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2} \Rightarrow x=2 \ et \ y=8$.

Solution : Soient : $x \geq 1 \quad et \quad y \geq 4$

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}=x+y \ \Rightarrow 2\sqrt{x-1}+2\times 2\sqrt{y-4}=\sqrt{x-1}^2+\sqrt{y-4}^2+5$

$\Rightarrow \sqrt{x-1}^2-2\sqrt{x-1}+1+\sqrt{y-4}^2-2\times 2\sqrt{y-4}+2^2=0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-4}-2\right)^2=0 \Rightarrow \sqrt{x-1}-1=0 \ et \ \sqrt{y-4}-2=0 \ \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \ et \ \sqrt{y-4}=2$

$\Rightarrow x-1=1 \ et \ y-4=4 \ \Rightarrow x=2 \ et \ y=8$

Exercice9 : Montrer par l'absurde que : $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x \times \sin x \neq 1$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists x \in \mathbb{R} : \cos x \times \sin x = 1$

$\cos x \times \sin x=1 \Rightarrow \cos x \times \sin x=\cos^2 x+\sin^2 x \Rightarrow \cos x \times \sin x-2\cos x \times \sin x=\cos^2 x+\sin^2 x-2\cos x \times \sin x$

$\Rightarrow -\cos x \times \sin x=(\cos x-\sin x)^2 \Rightarrow -1=(\cos x-\sin x)^2$ C'est une contradiction car le carré est toujours positif

Ceci signifie : $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x \times \sin x \neq 1$

Exercice10 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{4n+2026} \notin \mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n+2026} \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n+2026}=m$

$\sqrt{4n+2026}=m \Leftrightarrow 4n+2026=m^2 \Rightarrow 2(2n+1013)=m^2 \Rightarrow m^2=2k$ avec $k=2n+1013 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m^2$ est pair $\Rightarrow m$ est pair $\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}$ tel que : $m=2k'$

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}$ tel que : $2(2n+1013)=(2k')^2$

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}$ tel que : $2n+1013=2k'^2$

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}$ tel que : $1013=2k'^2-2n$

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}$ tel que : $1013 = 2\left(k'^2 - 2\right)$

$\Rightarrow 1013$ est pair

C'est une contradiction car on sait que : 1013 est impair

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{4n + 2026} \notin \mathbb{N}$

Exercice11 : Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Solution : On a : $n \in \mathbb{N}$ donc $n+1 \prec n+2$

Donc $0 \prec \frac{n+1}{n+2} \prec 1$ alors : $\frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Exercice12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $x^2 - |x-2| + 5 = 0$

Solution : Soit S l'ensemble des solutions de (1)

Soit $x \in \mathbb{R}$: étudions le signe de : $x - 2$

Premier cas : si $x \in [2; +\infty[$ alors $|x-2| = x - 2$

Donc l'équation (1) devient : $x^2 - (x-2) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 7 = 0$

$\Delta = 1 - 28 = -27 \prec 0$ Donc : $S_1 = \varnothing$

Deuxième cas : si $x \in]-\infty; 2[$ alors $|x-2| = -(x-2) = -x + 2$

Donc l'équation (1) devient : $x^2 + (x-2) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 0$; $\Delta = 1 - 12 = -11 \prec 0$

Donc : $S_2 = \varnothing$ Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$

Exercice13 : (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x} = x - 2$

Solution : Remarque : La relation $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x \geq 0$

L'équation est donc définie sur : $D_E = [0, +\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres
Sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{x} = x - 2$ Signifie que : $\sqrt{x}^2 = (x-2)^2$ et $x \in [2, +\infty[$

Signifie que : $x = x^2 - 4x + 4$ Signifie que : $x^2 - 5x + 4 = 0$

Le discriminant de : $x^2 - 5x + 4 = 0$ est : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$ et ses solutions sont :

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \notin D_E$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4 \in D_E$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ Signifie que : $x = 4 \in D_E$

Par conséquent : $S = \{4\}$

Exercice14 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : (I) : $\sqrt{3-x} + x \prec 0$

Solution : Soit S l'ensemble des solutions de (E)

On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation (I) : $\sqrt{3-x} + x \prec 0$

$D_I = \{x \in \mathbb{R} / 3 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\} =]-\infty; 3]$

$\sqrt{3-x} + x \prec 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} \prec -x$

On va Opérer par disjonction de cas

Soit $x \in \left]-\infty;3\right]$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $0 \prec x \leq 3$: Alors : $-3 \leq -x \prec 0$ et puisque $\sqrt{3-x} \geq 0$

Donc : $S_1 = \varnothing$

2iém cas : $x \leq 0$: Alors : $-x \geq 0$

$$\sqrt{3-x} \prec -x \Leftrightarrow \sqrt{3-x}^2 \prec (-x)^2 \Leftrightarrow 3-x \prec x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-3 \succ 0 \ ; \ \Delta = 13 \ ; \ x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

Le tableau de signe de l'expression x^2+x-3 est :

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	3
$x2-x+3$	$+$	0	$-$	$-0+$	

$$S_2 = \left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[$$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing \cup \left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[= \left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[$

Exercice15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $|x-1|+2x-3 \geq 0$

Solution : Soit S l'ensemble des solutions de (1)

Soit $x \in \mathbb{R}$: on va déterminer le signe de : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

Si $x \in \left[1;+\infty\right[$ alors $|x-1| = x-1$

Donc l'inéquation (1) devient : $x-1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x-4 \geq 0$

$3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$ donc : $S_1 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[\cap \left[1;+\infty\right[= \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Si $x \in \left]-\infty;1\right]$ alors $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

Donc l'inéquation (1) devient : $-x+1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Donc : $S_2 = \left[2;+\infty\right[\cap \left]-\infty;1\right] = \varnothing$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exercice16 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que : $|x-y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Solution : Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; $|x-y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy} \Leftrightarrow |x-y|^2 \leq \left(2\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)^2$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \leq 4x^2+4y^2+4xy \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+2xy+y^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 0$$

On sait que $(x+y)^2 \geq 0$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$: $|x-y|\le 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exercice17 : 1) Montrer que :$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right)$ $\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\prec\sqrt{a}-\sqrt{b}\Leftrightarrow a\succ b$

3) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$; Montrer que : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

4)a) Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ Montrer que :$\left(a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow\left(a=b \text{ ou } a=\frac{1}{b}\right)$

b) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$

Solution : 1) a) $\Rightarrow$:$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

Supposons que ; $a+b=0$ et ($a\neq 0$ ou $b\neq 0$) et $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b\succ 0$ contradiction par suite $a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

Donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

$$\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\prec\sqrt{a}-\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{b}\prec\sqrt{a}+\sqrt{b+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b}\right)^2\prec\left(\sqrt{a}+\sqrt{b+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a+1+2\sqrt{b(a+1)}+b\prec a+2\sqrt{a(b+1)}+b+1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{b(a+1)}\prec 2\sqrt{a(b+1)}\Leftrightarrow\sqrt{b(a+1)}\prec\sqrt{a(b+1)}\Leftrightarrow b(a+1)\prec a(b+1)\Leftrightarrow ab+b\prec ab+a\Leftrightarrow b\prec a$$

Donc : $\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\prec\sqrt{a}-\sqrt{b}\Leftrightarrow a\succ b$

3) Soit : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$$

Or $\sqrt{x^2+1}-1\ge 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1\ge 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1\Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc :$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

4)a) Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$

$$\left(a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0\Leftrightarrow a-b+\frac{b-a}{ab}=0\Leftrightarrow a-b-\frac{(a-b)}{ab}=0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)=0\Leftrightarrow a-b=0 \text{ ou } 1-\frac{1}{ab}=0\Leftrightarrow a=b= \text{ ou } ab=1\Leftrightarrow a=b= \text{ ou } a=\frac{1}{b}$$

Donc : $\left(a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow\left(a=b \text{ ou } a=\frac{1}{b}\right)$

b) Déduction de l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$.

L'équation existe si et seulement si $x\in\mathbb{R}^*$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$: $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=4+\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2=4 \text{ ou } \frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=2 \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{1}{2}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S=\left\{-2;-\frac{1}{2};\frac{1}{2};2\right\}$

Exercice18 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3

Solution : Montrons $\exists k\in\mathbb{N} / n^3-n=3k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^3-0=0$ est un multiple de3
Donc P (0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / n^3-n=3k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(n^3-n)+3n^2+3n=3k+3(n^2+n)=3(k+n^2+n)=3k'$

Avec $k'=k+n^2+n\in\mathbb{N}$
Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};n^3-n$ est divisible par 3

Exercice19 : 1) Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\forall a\in\mathbb{R}_+^*;(1+a)^n\geq 1+na$ (Inégalité de Bernoulli).

2) En déduire que : a)$\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n\geq 1+n$ b)$\forall n\in\mathbb{N}$; $3^n\succ n$ c)$\forall n\in\mathbb{N}^*$; $(1+n)^n\geq 2n^n$

Solution : 1) Notons P(n) La proposition suivante : $\forall n\in\mathbb{N};\forall a\in\mathbb{R}_+^*;(1+a)^n\geq 1+na$

Soit : $a\in\mathbb{R}_+^*$; Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $(1+a)^0\geq 1+0\times a$ donc $1\geq 1$.

Donc P (0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :
$(1+a)^n\geq 1+na$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)a$??

On a : $(1+a)^n\geq 1+na$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $(1+a)^n(1+a)\geq(1+na)(1+a)$

Donc : $(1+a)^{n+1}\geq 1+a+na+na^2$ c'est-à-dire :$(1+a)^{n+1}\geq(1+(1+n)a)+na^2$

Donc : $(1+a)^{n+1}\geq(1+(1+n)a)$ car $(1+(1+n)a)+na^2\geq 1+(1+n)a$ (On pourra faire la différence)

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire :
$\forall n\in\mathbb{N};\forall a\in\mathbb{R}_+^*;(1+a)^n\geq 1+na$.

2) On a : $\forall n\in\mathbb{N};\forall a\in\mathbb{R}_+^*;(1+a)^n\geq 1+na$

a) On prend : $a=1$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $(1+1)^n\geq 1+n\times 1$ c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n\geq 1+n$

b) On prend : $a=2$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $(1+2)^n\geq 1+n\times 2$ c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$; $3^n\geq 1+2n$

et comme $1+2n\succ n$ alors : $\forall n\in\mathbb{N}$; $3^n\succ n$

b) On prend : $a=\frac{1}{n}$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 1+n\times\frac{1}{n}$ c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\geq 2$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\frac{(n+1)^n}{n^n}\geq 2$ par suite : $(n+1)^n\geq 2n^n$

Exercice20 : Montrer que :$\forall n\in\mathbb{N}^*$; $13 / 2^{4n}-3^n$

Solution : Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $2^{4n}-3^n$ est un multiple de 13

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $2^{4\times 1}-3^{1}=16-3=13=13\times 1$

Alors : $2^{4\times 1}-3^{1}$ est un multiple de 13 donc P (0) est vraie.

2étape : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 2^{4n}-3^{n}=13k$

Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N} / 2^{4n+4}-3^{n+1}=13k'$??

On a : $\exists k\in\mathbb{N} / 2^{4n}-3^{n}=13k$ donc ; $\exists k\in\mathbb{N} / 2^{4n}=13k+3^{n}$

$$2^{4n+4}-3^{n+1}=2^{4n}\times 2^{4}-3^{n}\times 3=\left(13k+3^{n}\right)\times 2^{4}-3^{n}\times 3=13\times 2^{4}k+3^{n}\times 2^{4}-3^{n}\times 3$$

$$2^{4n+4}-3^{n+1}=13\times 2^{4}k+3^{n}\left(2^{4}-3\right)=13\times 2^{4}k+3^{n}\times 13$$

$2^{4n+4}-3^{n+1}=13\times\left(2^{4}k+3^{n}\right)=13\times k'$ avec $k'=2^{4}k+3^{n}\in\mathbb{N}$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence : on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $13 / 2^{4n}-3^{n}$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$.

Solution : Notons P(n) La proposition :" $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1^{2}}{(2\times 1-1)(2\times 1+1)}=\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3} \text{ et } \frac{1\times(1+1)}{2(2\times 1+1)}=\frac{2}{2\times 2}=\frac{1}{3}$$

Donc $1=1$. Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2(2n+3)}$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(n+1)^{2}}{(2n+1)(2n+3)}$

et on a : $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^{2}}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n\times(n+1)(2n+3)}{2(2n+1)(2n+3)}+\frac{2(n+1)^{2}}{2(2n+1)(2n+3)}$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n\times(n+1)(2n+3)+2(n+1)^{2}}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)\left[n\times(2n+3)+2(n+1)\right]}{2(2n+1)(2n+3)}$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(n+1)(2n^{2}+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^{2}+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}$

Et on remarque que : $2n^{2}+5n+2=(2n+1)(n+2)$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^{2}}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$ c'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n\times(n+1)}{2(2n+1)}$

Exercice22 : On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(I)\begin{cases}(m+1)x+3y=m\\3x+(m+1)y=2\end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-2)(m+4)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles $\Delta=0$

2) Vérifier que : $\Delta_x=(m-2)(m+3)$ et $\Delta_y=-(m-2)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et discuter suivant le paramètre m le système : (I)

Solution : 1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix}m+1 & 3\\3 & m+1\end{vmatrix}=(m+1)\times(m+1)-3\times3=(m+1)^2-3^2=(m+1-3)(m+1+3)=(m-2)(m+4)$$

b) $\Delta=0$ Signifie que : $(m-2)(m+4)=0$ Signifie que : $m-2=0$ ou $m+4=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=2$ ou $m=-4$

2) $\Delta_x=\begin{vmatrix}m & 3\\2 & m+1\end{vmatrix}=m(1+m)-6=m^2+m-6$: a = 1, b = 1 ; c = -6

Le discriminent est : $b^2-4ac=1^2+24=25>0$

Donc : $x_1=\frac{-1-\sqrt{25}}{2a}=\frac{-1-5}{2\times1}=\frac{-6}{2}=-3$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{25}}{2a}=\frac{-1+5}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

Donc : $\Delta_x=m^2+m-6=1(m-(-3))(m-2)=1(m+3)(m-2)$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}m+1 & m\\3 & 2\end{vmatrix}=2(1+m)-3m=-(m-2)$

3)*1ere cas* : si $\Delta\neq0$ c'est-à-dire : $m\neq2$ et $m\neq-4$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{(m-2)(m+3)}{(m-2)(m+4)}=\frac{m+3}{m+4}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-(m-2)}{(m-2)(m+4)}=-\frac{1}{m+4}$ Donc : $S=\left\{\left(\frac{m+3}{m+4};-\frac{1}{m+4}\right)\right\}$

2ere cas : si $\Delta=0$ c'est-à-dire : $m=2$ ou $m=-4$

Si $m=2$ on remplace m par 2 on trouve : $\begin{cases}3x+3y=2\\3x+3y=2\end{cases}$ qui est équivalent a : $3x+3y=2$

Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation $3x+3y=2$

$3x+3y=2$ est équivalent a : $3y=2-3x$ Signifie que : $y=\frac{2}{3}-x$

Alors on a : $S=\left\{\left(x;\frac{2}{3}-x\right)/\,x\in\mathbb{R}\right\}$

Si $m=-4$ on remplace m par -4 on trouve : $\begin{cases}-3x+3y=-4\\3x-3y=2\end{cases}$ qui est équivalent à : $\begin{cases}3x-3y=4\\3x-3y=2\end{cases}$

impossible Donc : $S=\varnothing$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien