http://www.xriadiat.com/

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°23 avec Correction : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Le raisonnement par disjonction de cas et la fonction partie entière

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice1 : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et Calculer :

1) $E\left(\frac{n+1}{n}\right)$ **si** $n\in\mathbb{N}^*$ 2) $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Solution : Remarques : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ E(x)\in\mathbb{Z}$ et La partie entière vérifie Les propriétés suivantes

- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ E(x)\le x\prec E(x)+1$ par définition
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x-1\prec E(x)\le x$
- $\forall p\in\mathbb{Z}\ \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ E(x+p)=p+E(x)$
- $\forall p\in\mathbb{Z}\ \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow E(x)=x$

1)Calculons : a) $E\left(\frac{n+1}{n}\right)$ **si** $n\in\mathbb{N}^*$

On a : $n\in\mathbb{N}^*$ donc : $n\ge 1$

✓ Si : $n=1$: $E\left(\frac{n+1}{n}\right)=E\left(\frac{1+1}{1}\right)=E(2)=2$

✓ Si : $n\succ 1$: $0\prec\frac{1}{n}\prec 1\Rightarrow 0\le\frac{1}{n}\prec 1\Rightarrow E\left(\frac{1}{n}\right)=0$

$$E\left(\frac{n+1}{n}\right)=E\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=E\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+E\left(\frac{1}{n}\right)=1+0=1$$

2) $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=E\left(\frac{n^2+2n+1+3}{n+1}\right)=E\left(\frac{(n+1)^2+3}{n+1}\right)=E\left(\frac{(n+1)^2}{n+1}+\frac{3}{n+1}\right)=E\left(n+1+\frac{3}{n+1}\right)$$

$E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=E\left(\frac{n^2+2n+1+3}{n+1}\right)=n+1+E\left(\frac{3}{n+1}\right)$ car : $n+1\in\mathbb{N}$

On a : $n\in\mathbb{N}$ donc : $n\ge 0\ \Rightarrow n\ge 0\Rightarrow n+1\ge 1$

✓ Si : $n=0$; $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=0+1+E\left(\frac{3}{0+1}\right)=1+E(3)=1+3=4$

✓ Si : $n=1\ ou\ n=2\Rightarrow E\left(\frac{3}{n+1}\right)=1$ et donc : $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1+1=n+2$: :

✓ Si : $n\ge 3\Rightarrow n+1\succ 3\Rightarrow 0\prec\frac{3}{n+1}\prec 1$

$$E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1+E\left(\frac{3}{n+1}\right)=n+1+0=n+1$$

Exercice2 : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et Calculer :

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}$; $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=n$

2) Montrer que : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$; $E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$

3) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$; $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

Indication : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas

Solution : Remarques : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ E(x)\in\mathbb{Z}$ et La partie entière vérifie Les propriétés suivantes

- $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\le x\prec E(x)+1$ par définition
- $\forall x\in\mathbb{R}$; $x-1\prec E(x)\le x$
- $\forall p\in\mathbb{Z}\ \forall x\in\mathbb{R}$; $E(x+p)=p+E(x)$
- $\forall p\in\mathbb{Z}\ \forall x\in\mathbb{R}$; $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow E(x)=x$

1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{Z}$; $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=n$

Soit $n\in\mathbb{Z}$: on peut distinguer les cas suivants :

1ier cas : $\boxed{n=4k}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$$E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=E\left(\frac{4k-1}{2}\right)+E\left(\frac{4k+2}{4}\right)+E\left(\frac{4k+4}{4}\right)$$

$$=E\left(2k-\frac{1}{2}\right)+E\left(k+\frac{1}{2}\right)+E(k+1)=2k-E\left(\frac{1}{2}\right)+k+E\left(\frac{1}{2}\right)+k+E(1)=2k-0+k+0+k+1$$

Donc : $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=4k=n$

2ier cas : $\boxed{n=4k+1}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$$E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=E\left(\frac{4k+1-1}{2}\right)+E\left(\frac{4k+1+2}{4}\right)+E\left(\frac{4k+1+4}{4}\right)$$

$$=E(2k)+E\left(k+\frac{3}{4}\right)+E\left(k+\frac{1}{4}+1\right)=2k+k+E\left(\frac{3}{4}\right)+k+1+E\left(\frac{1}{4}\right)=2k+k+0+k+1+0$$

Car : $0\le\frac{3}{4}\prec 1$ donc : $E\left(\frac{3}{4}\right)=0$ et : $0\le\frac{1}{4}\prec 1$ donc : $E\left(\frac{1}{4}\right)=0$

Donc : $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=4k+1=n$

3ier cas : $\boxed{n=4k+2}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$$E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=E\left(\frac{4k+2-1}{2}\right)+E\left(\frac{4k+2+2}{4}\right)+E\left(\frac{4k+2+4}{4}\right)$$

$= E\left(2k+\frac{1}{2}\right)+E\left(k+1\right)+E\left(k+\frac{1}{2}+1\right)=2k+E\left(\frac{1}{2}\right)+k+1+k+1=2k+0+k+1+k+1+0$

Car : $0\leq\frac{1}{2}\prec 1$ donc : $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

Donc : $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=4k+2=n$

4^er^ cas : $\boxed{n=4k+3}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=E\left(\frac{4k+3-1}{2}\right)+E\left(\frac{4k+3+2}{4}\right)+E\left(\frac{4k+3+4}{4}\right)$

$=E\left(\frac{4k+2}{2}\right)+E\left(\frac{4k+5}{4}\right)+E\left(\frac{4k+7}{4}\right)=E\left(2k+1\right)+E\left(k+1+\frac{1}{4}\right)+E\left(k+1+\frac{3}{4}\right)$

$=2k+1+k+1+E\left(\frac{1}{4}\right)+k+1+E\left(\frac{3}{4}\right)=2k+1+k+1+0+k+1+0$

Donc : $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=4k+3=n$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{Z}$; $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+E\left(\frac{n+2}{4}\right)+E\left(\frac{n+4}{4}\right)=n$

2) Montrons que : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$; $E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$

Soient : $(n;m)\in\mathbb{N}^2$

1^ier^ cas : $\boxed{n+m=2k}$ avec : $k\in\mathbb{N}\Rightarrow n=2k-m$

$E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=E\left(\frac{2k}{2}\right)+E\left(\frac{2k-m-m+1}{2}\right)=E\left(k\right)+E\left(\frac{2k-2m+1}{2}\right)$

$=E\left(k\right)+E\left(k-m+\frac{1}{2}\right)=k+k-m+E\left(\frac{1}{2}\right)=2k-m+0=2k-m=\boxed{n}$

2^ier^ cas : $\boxed{n+m=2k+1}$ avec : $k\in\mathbb{N}\Rightarrow n=2k+1-m$

$E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=E\left(\frac{2k+1}{2}\right)+E\left(\frac{2k+1-m-m+1}{2}\right)=E\left(k+\frac{1}{2}\right)+E\left(k-m+1\right)$

$=k+E\left(\frac{1}{2}\right)+k-m+1=2k+0-m+1=2k+1-m=\boxed{n}$

Finalement : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$; $E\left(\frac{n+m}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$: On peut distinguer les 3 cas suivants :

1^ier^ cas : $\boxed{n=3k}$ avec : $k\in\mathbb{N}^*$

On a : $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{(3k)^2}{3}\right)-E\left(\frac{(3k-1)^2}{3}\right)=E\left(3k^2\right)-E\left(\frac{9k^2-6k+1}{3}\right)$

$E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)==3k^2-E\left(3k^2-2k+\frac{1}{3}\right)=3k^2-3k^2+2k-E\left(\frac{1}{3}\right)=2k$

Et on a : $E\left(\frac{2n}{3}\right)=E\left(\frac{2\times 3k}{3}\right)=E(2k)=2k$

Donc : si $n=3k$ $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

2ier cas : $\boxed{n=3k+1}$ avec : $k\in\mathbb{N}$

On a : $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{(3k+1)^2}{3}\right)-E\left(\frac{(3k+1-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{9k^2+6k+1}{3}\right)-E\left(3k^2\right)$

$E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)==E\left(3k^2+2k+\frac{1}{3}\right)-3k^2=3k^2+2k+E\left(\frac{1}{3}\right)-3k^2=3k^2+2k+0-3k^2=2k$

Et on a : $E\left(\frac{2n}{3}\right)=E\left(\frac{2\times(3k+1)}{3}\right)=E\left(\frac{6k+2}{3}\right)=E\left(2k+\frac{2}{3}\right)=2k+E\left(\frac{2}{3}\right)=2k+0=2k$

Donc : si $n=3k+1$ $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

3ier cas : $\boxed{n=3k+2}$ avec : $k\in\mathbb{N}$

On a : $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{(3k+2)^2}{3}\right)-E\left(\frac{(3k+2-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{9k^2+12k+4}{3}\right)-E\left(\frac{9k^2+6k+1}{3}\right)$

$=E\left(3k^2+4k+\frac{4}{3}\right)-E\left(3k^2+2k+\frac{1}{3}\right)=3k^2+4k+E\left(\frac{4}{3}\right)-3k^2-2k-E\left(\frac{1}{3}\right)=3k^2+4k+1-3k^2-2k-0=2k+1$

Et on a : $E\left(\frac{2n}{3}\right)=E\left(\frac{2\times(3k+2)}{3}\right)=E\left(\frac{6k+4}{3}\right)=E\left(2k+\frac{4}{3}\right)=2k+E\left(\frac{4}{3}\right)=2k+1=2k+1$

Donc : si $n=3k+2$ $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $E\left(\frac{n^2}{3}\right)-E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right)=E\left(\frac{2n}{3}\right)$

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $E(2x-1)=E(x-4)$ 2) (E): $E(3x)+2E(x)=15$

Solution : 1) $E(2x-1)=E(x-4)\Leftrightarrow E(2x)-1=E(x)-4\Leftrightarrow E(2x)=E(x)-3$: (E)

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Soit : $x\in S$: On pose : $E(x)=k\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow k\le x\prec k+1$

1ércas : $k\le x\prec k+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2k\le 2x\prec 2k+1\Leftrightarrow E(2x)=2k$

$x \in S \Leftrightarrow E(2x) = E(x) - 3 \Leftrightarrow 2k = k - 3 \Leftrightarrow \boxed{k = -3}$

$E(x) = -3 \Leftrightarrow -3 \leq x \prec -3 + 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \prec -2 \Leftrightarrow x \in [-3; -2[$

D'où : $S_1 = [-3; -2[\cap \left[-3; -3 + \frac{1}{2}\right[= [-3; -2[\cap \left[-3; -\frac{5}{2}\right[= \left[-3; -\frac{5}{2}\right[$

2ércas : $k + \frac{1}{2} \leq x \prec k + 1 \Leftrightarrow 2k + 1 \leq 2x \prec 2k + 2 \Leftrightarrow E(2x) = 2k + 1$

$x \in S \Leftrightarrow E(2x) = E(x) - 3 \Leftrightarrow 2k + 1 = k - 3 \Leftrightarrow \boxed{k = -4}$

$E(x) = -4 \Leftrightarrow -4 \leq x \prec -4 + 1 \Leftrightarrow -4 \leq x \prec -3 \Leftrightarrow x \in [-4; -3[$

D'où : $S_2 = [-4; -3[\cap \left[-4 + \frac{1}{2}; -4 + 1\right[= [-4; -3[\cap \left[-\frac{7}{2}; -3\right[= \left[-\frac{7}{2}; -3\right[$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \left[-3; -\frac{5}{2}\right[\cup \left[-\frac{7}{2}; -3\right[= \left[-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right[$

2) (E): $E(3x) + 2E(x) = 15$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Soit : $x \in S$: On pose : $E(x) = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \leq x \prec k + 1$

1ércas : $k \leq x \prec k + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3k \leq 3x \prec 3k + 1 \Leftrightarrow E(3x) = 3k$

$x \in S \Leftrightarrow E(3x) + 2E(x) = 15 \Leftrightarrow 3k + 2k = 15 \Leftrightarrow 5k = 15 \Leftrightarrow \boxed{k = 3}$

$E(x) = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x \prec 3 + 1 \Leftrightarrow 3 \leq x \prec 4 \Leftrightarrow x \in [3; 4[$

D'où : $S_1 = [3; 4[\cap \left[3; 3 + \frac{1}{3}\right[= [3; 4[\cap \left[3; \frac{10}{3}\right[= \left[3; \frac{10}{3}\right[$

2ércas : $k + \frac{1}{3} \leq x \prec k + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3k + 1 \leq 3x \prec 3k + 2 \Leftrightarrow E(3x) = 3k + 1$

$x \in S \Leftrightarrow E(3x) + 2E(x) = 15 \Leftrightarrow 3k + 1 + 2k = 15 \Leftrightarrow 5k = 14 \Leftrightarrow k = \frac{14}{5} \notin \mathbb{Z}$ D'où : $S_2 = \varnothing$

2ércas : $k + \frac{2}{3} \leq x \prec k + 1 \Leftrightarrow 3k + 2 \leq 3x \prec 3k + 3 \Leftrightarrow E(3x) = 3k + 2$

$x \in S \Leftrightarrow E(3x) + 2E(x) = 15 \Leftrightarrow 3k + 2 + 2k = 15 \Leftrightarrow 5k = 13 \Leftrightarrow k = \frac{13}{5} \notin \mathbb{Z}$ D'où : $S_3 = \varnothing$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[3; \frac{10}{3}\right[\cup \varnothing \cup \varnothing = \left[3; \frac{10}{3}\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien