1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°22 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*
PROF: ATMANI NAJIB

Exercice1 : Déterminer la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes et (justifier vos réponses avec un raisonnement bien précis) :

1) P_1 : « $(\forall n \in \mathbb{N})$; $6n+5$ est un nombre premier »

2) P_2 : « $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$ »

3) P_3 : « $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$; $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$ »

4) P_4 : « $\forall x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq x^2-2x+3$ »

5) P_5 : « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) ; 0 \prec y^2-x-1$

6) P_6 : « $\forall n \in \mathbb{N}$; $2^n \geq 1+n$ »

Solution : 1) On utilise un raisonnement par contre-exemple :

$\overline{P_1}$: « $(\exists n \in \mathbb{N})$ / $6n+5$ n'est pas un nombre premier » est vraie

En effet : pour $(\exists n = 12 \in \mathbb{N})$ *et* $6\times 12+5 = 72+5 = 77 = 7\times 11$

77 n'est pas un nombre premier ($n=12$ est le contre-exemple)

La proposition $\overline{P_1}$: est vraie par suite P_1 : est <u>fausse</u>

2) Montrons que : $P_2 : \forall n \in \mathbb{N} : \frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$: Par l'absurde, supposons que :: $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{4n+3}{6} \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{4n+3}{6} = m$

$\frac{4n+3}{6} = m \Leftrightarrow 4n+3 = 6m \Rightarrow 3 = 6m-4n \Rightarrow 3 = 2(3m-2n) \Rightarrow 3 = 2k$ avec $k = 3m-2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 3$ est pair !. C'est une contradiction car on sait que : 3 est impair

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$

Autre procédure : $3 = 2(3m-2n) \Rightarrow 3 = 2k \Rightarrow$ 2 divise 3 $\Rightarrow$ absurde car on sait que : 2 ne divise pas 3

Soit $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$

3) Montrons que : P_3 : « $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$; $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$ » est vraie

Utilisons un Raisonnement par contraposition : Montrons que : $\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow 3x = x+1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow 2x = 1$

Alors : Par contraposition : $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$; $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$

$\overline{P_3}: \exists x \in \mathbb{R}-\{-1\}$; $x \neq \frac{1}{2}$ et $\frac{3x}{x+1}=1$

4) P_4 : « $\forall x \in \mathbb{R}: |x-2| \leq x^2-2x+3$ »

Soit $x \in \mathbb{R}$: <u>Premier cas :</u> si $x-2 \geq 0$ c'est-à-dire ; : $x \geq 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$x^2-2x+3-(x-2)=x^2-2x+3-x+2=x^2-3x+5$: $\Delta=(-3)^2-20=-11 \prec 0$

Comme : $a=1 \succ 0$ alors : $x^2-3x+5 \succ 0$ est une proposition vraie

Alors : $x^2-2x+3-(x-2) \succ 0$

Alors : si $x \geq 2$: $|x-2| \leq x^2-2x+3$

<u>2 ieme cas :</u> si : $x-2 \prec 0$ c'est-à-dire ; $x \prec 2 \Rightarrow |x-2| = -x+2$

$x^2-2x+3-(-x+2)=x^2-2x+3+x-2=x^2-x+1$: $\Delta=(-1)^2-4=-3 \prec 0$

$x^2-2x+3-(-x+2) \succ 0$

Alors : si $x \prec 2$: $|x-2| \leq x^2-2x+3$

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas : P_4 : « $\forall x \in \mathbb{R}: |x-2| \leq x^2-2x+3$ » est vraie

$\overline{P_4}$: « $\exists x \in \mathbb{R}: |x-2| \succ x^2-2x+3$ »

5) P_5 : « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); 0 \prec y^2-x-1$

« $0 \prec y^2-x-1 \Leftrightarrow x+1 \prec y^2$

il suffit de prendre : $x=-2$ et on trouve : $(\forall y \in \mathbb{R}); -1 \prec y^2$ (vraie)

Par suite : la proposition P_5 : est vraie.

$\overline{P_5}$: « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); 0 \geq y^2-x-1$

6) Montrons $P_6(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}$; $2^n \geq 1+n$ » est vraie ?

Utilisons un Raisonnement par récurrence :

Nous allons démontrer par récurrence que $P_6(n)$: est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $2^0 = 1 \geq 1+0$ donc $1 \geq 1$.

Donc $P_6(0)$: est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que $P_6(n)$: soit vraie c'est-à-dire :

$2^n \geq 1+n$

3étapes : Nous allons montrer que $P_6(n+1)$: est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1} \geq 2+n$??

On a : $2^n \geq 1+n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $2^n \times 2 \geq (1+n) \times 2$

Donc : $2^{n+1} \geq 2n+2$ et $2n+2 \geq n+2$ car $2n+2-(n+2)=2n+2-n-2=n \geq 0$

Donc : $2^{n+1} \geq 2+n$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence

$P_6(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}$; $2^n \geq 1+n$ » est vraie

Exercice2 : Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

Nier les assertions suivantes :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) \neq 0$

2) $(\forall M \succ 0); (\exists A \geq 0); \forall x \succ A; f(x) \succ M$

3) $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)\succ 0\Rightarrow x\leq 0$

4) $(\forall\varepsilon\succ 0);(\exists\alpha\succ 0)(\forall(x;y)\in I^2):|x-y|\leq\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$

Solution :1) $(\exists x\in\mathbb{R})/f(x)=0$

2) $(\exists M\succ 0);(\forall A\geq 0);\exists x\succ A;f(x)\leq M$

3) $(\exists x\in\mathbb{R});f(x)\succ 0\ et\ x\succ 0$

4) $(\exists\varepsilon\succ 0);(\forall\alpha\succ 0)(\exists(x;y)\in I^2):|x-y|\leq\alpha\ \ et\ |f(x)-f(y)|\succ\varepsilon$

Exercice3 : S'il pleut, Ali prend un parapluie"
"Salah ne prend jamais de parapluie s'il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut". dir s'il pleut ou s'il ne pleut pas de ces affirmations dans les différentes situations ci-dessous ? Justifier soigneusement vos réponses en introduisant 3 propositions logiques P, Q et R.

1) Ali se promène avec un parapluie.
2)Ali se promène sans parapluie.
3) Salah se promène avec un parapluie.
4) Salah se promène sans parapluie.
5)Il ne pleut pas.
6) Il pleut.

Solution : Notons P "il pleut", Q"Ali a un parapluie" et R" Salah a un parapluie". L'énoncé nous dit que $P\Rightarrow Q$et que $P\Leftrightarrow R$

1)Dans cette situation, on nous dit que$Q$est vraie. On ne peut rien conclure.

2) $\overline{Q}$est vraie. Or, on sait (contraposée de $P\Rightarrow Q$) que ($\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$). Donc il ne pleut pas.

3) R est vraie, et Réquivaut à P. Donc il pleut.

4) $\overline{R}$est vraie et $\overline{R}$équivaut à non p donc il ne pleut pas.

5) $\overline{P}$est vraie et $\overline{P}$équivaut à $\overline{R}$donc Salah se promène sans parapluie.

6) Pest vraie or $P\Rightarrow Q$et $P\Leftrightarrow R$donc Ali et Salah ont tous deux leur parapluie.

Exercice4 : Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

1) $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\sqrt{x}\geq 5\Leftrightarrow$.........

2) $(\forall x\in\mathbb{R});-2x^2\prec 100\Leftrightarrow$.........

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\dfrac{1}{x}\prec x\Leftrightarrow$.........

4) $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\leq x\Leftrightarrow$.........

Solution :1) $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\sqrt{x}>5\Leftrightarrow\sqrt{x}^2>5^2\Leftrightarrow x>25\Leftrightarrow x\in]25;+\infty[$

2) $(\forall x\in\mathbb{R});-2x^2\prec -50\Leftrightarrow x^2\succ 25\Leftrightarrow x^2-25\succ 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\dfrac{1}{x}\prec x\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{x}\succ 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-1}{x}\succ 0\Leftrightarrow x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[$

Remarque : On utilise le tableau de signe pour trouver les solutions des inéquations

4) $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\leq x\Leftrightarrow x^2-x\leq 0\Leftrightarrow x(x-1)\leq 0\Leftrightarrow x\in[0;1]$

Exercice5 : Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie :

"$(\forall y\in[0,1]):x\geq y\Rightarrow x\geq 2y$"

Solution : On sépare en 4 cas :

1) $x\geq 2$Alors, pour tous $y\in[0,1]$les propositions $x\geq y\ et\ x\geq 2y$sont vraies. D'après la table de vérité de l'implication, l'assertion est vraie.

2) $x \prec 0$. Alors, pour tous $y \in [0,1]$ les propositions $x \geq y \; et \; x \geq 2y$ sont fausses. D'après la table de vérité de l'implication, l'assertion est vraie.

3) $x \in]0,2]$ On peut alors trouver un réel $y \in [0,1]$ tel que $2y \succ x \; et \; x \geq y$. En effet, $\frac{x}{2} \in]0,1[$ et il suffit de choisir : $\frac{x}{2} \prec y \prec \min(1;x)$

Dans ce cas, $x \geq y$ est vraie et $x \geq 2y$ est fausse. L'assertion est fausse.

4) Si x=0, alors les assertions $x \geq y$ et $x \geq 2y$ sont ou bien simultanément fausses (lorsque $y \in]0,1]$), ou bien simultanément vraies. L'assertion est donc vraie.

Exercice6 : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[$

1)Montrer que : $-1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1$

2) Montrer que : $|a+b| \leq |1+ab|$

Solution : $-1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a+b}{1+ab}\right| \prec 1 \Leftrightarrow |a+b| \prec |1+ab|$

$\Leftrightarrow |a+b|^2 \prec |1+ab|^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \prec 1+a^2b^2+2ab$

Donc : $-1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1 \Leftrightarrow (a^2-1)(1-b^2) \prec 0$

Donc : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[\Rightarrow -1 \prec a \prec 1$ et $-1 \prec b \prec 1$

$\Rightarrow |a| \prec 1$ et $|b| \prec 1 \Rightarrow a^2 \prec 1$ et $b^2 \prec 1 \Rightarrow a^2-1 \prec 0$ et $1-b^2 \succ 0$

$\Rightarrow (a^2-1)(1-b^2) \prec 0$

Donc : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[\Rightarrow -1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1$

Exercice7 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}} > 1$

Solution : Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}\right)^2 > 1^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 > 4x(x+1)$

$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1 > 4x^2+4x \Leftrightarrow 1 > 0$

Et puisque on a : $1 > 0$ est une proposition vraie

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}} > 1$

Exercice8 : 1) Montrer que : $\forall (x;y) \in ([0;+\infty[)^2$; $x+y \geq 2\sqrt{xy}$

2) Déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $x+\frac{1}{x} \geq 2$

3) Déduire que : $\forall (a;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a} \geq 4$

Solution :1) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(x;y) \in ([0;+\infty[)^2$:

On a : $x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$

Et puisque on a : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$; $\forall(x;y)\in\left([0;+\infty[\right)^2$ (vraie)

Alors : $\forall(x;y)\in\left([0;+\infty[\right)^2$; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$; on a : $\forall(x;y)\in\left([0;+\infty[\right)^2$; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

Par exemple on prend : $x\ et\ \frac{1}{x}$ et on applique la proposition :

$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{1}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $x+\frac{1}{x}\geq 2$

3) Déduisons que : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Soit $(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: on a : $\forall(x;y)\in\left([0;+\infty[\right)^2$; $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

On donc : d'après 1) si on prend : $x=\frac{a^2+1}{b}$ et $y=\frac{b^2+1}{a}$

On aura : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{b}\times\frac{b^2+1}{a}}$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}}$

On donc : d'après 2) $a+\frac{1}{a}\geq 2\Leftrightarrow\frac{a^2+1}{a}\geq 2$ et aussi $b+\frac{1}{b}\geq 2\Leftrightarrow\frac{b^2+1}{b}\geq 2$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}}\geq 2\sqrt{2\times 2}$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Par suite : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Exercice9 : En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

1) $\left(\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right)\left(y\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\right):x\neq y\Rightarrow x^2-3x\neq y^2-3y$

2) Soient $x;y\ et\ z$ trois réels. Montrer que : $x+y\succ z\Rightarrow x\succ\frac{z}{2}\ ou\ y\succ\frac{z}{2}$

3) $\left[\forall x\in\mathbb{R}:a\prec x\Rightarrow b\prec x\right]\Rightarrow b\leq a$

4) $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ y\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(xy\sqrt{2}-x-y+\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Solution : 1) Soient $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\ et\ y\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

Montrons que : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$

$x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x^2-3x-y^2+3y=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y)-3(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y-3)=0\Rightarrow x-y=0\ ou\ x+y-3=0$

$\Rightarrow x = y \ ou \ x + y = 3$ et comme on a : $x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[\ et \ y \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ alors $x \succ \frac{3}{2} \ et \ x \succ \frac{3}{2}$

Et par suite : $x + y \succ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x + y \succ 1 \Rightarrow x + y \neq 1$

$x^2 - 3x = y^2 - 3y \Rightarrow x = y$

Par contraposition on a donc : $\left(\forall x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[\right)\left(y \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[\right) : x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$

2) Soient $x; y \ et \ z$ trois réels. Montrons que : $x \leq \frac{z}{2} \ et \ y \leq \frac{z}{2} \Rightarrow x + y \leq z$

$x \leq \frac{z}{2} \ et \ y \leq \frac{z}{2} \Rightarrow x + y \leq \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \Rightarrow x + y \leq z$

Par contraposition on a donc : $x + y \succ z \Rightarrow x \succ \frac{z}{2} \ ou \ y \succ \frac{z}{2}$

3) Montrons que : $b \succ a \Rightarrow [\exists x \in \mathbb{R} : a \prec x \ et \ b \geq x]$?

$a \prec b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : a \prec x \prec b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : a \prec x \ \ et \ \ x \prec b$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : a \prec x \ \ et \ \ x \leq b$

Par contraposition on a donc : $[\forall x \in \mathbb{R} : a \prec x \Rightarrow b \prec x] \Rightarrow b \leq a$

4) Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$: Montrons que : $\left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ou \ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} \Rightarrow 2xy2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 = 1$

$\Rightarrow 2xy - \sqrt{2}y - \sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow 2y\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2y - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ ou \ 2y - \sqrt{2} = 0 \ \ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ ou \ y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Par contraposition on a donc : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$: $\left(x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \ et \ y \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice10 : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

1) Si n est non divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3

2) Déduire que : $\forall (a; b) \in \mathbb{N}^2$; $ab\left(a^2 - b^2\right)$ est divisible par 3

Solution :1) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec n non divisible par 3

Il y'a deux façons d'écrire n : $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ avec : $k \in \mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement par disjonction des cas :

<u>1ére cas :</u> si $n = 3k + 1$: $n^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 9k^2 + 6k = 3\left(3k^2 + 2k\right) = 3k'$ avec :

$k' = 3k^2 + 2k \in \mathbb{N}$

Donc : $n^2 - 1$ est un multiple de 3 dans ce cas

<u>2ére cas :</u> si $n = 3k + 2$

$n^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3\left(3k^2 + 4k + 1\right) = 3k'$

Avec : $k' = 3k^2 + 4k + 1 \in \mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $n^2 - 1$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas le nombre n^2-1 est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que n est non divisible par 3

2) Soit $(a;b)\in\mathbb{N}^2$: $ab\left(a^2-b^2\right)=ab\left(a^2-1+1-b^2\right)=ab\left(\left(a^2-1\right)-\left(b^2-1\right)\right)$

1ére cas : si a est divisible par 3 ou b est divisible par 3

Alors : ab est divisible par 3 et par suite : $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

2ére cas : a n'est pas divisible par 3 ou b n'est pas divisible par 3

D'après 1) : a^2-1 est divisible par 3 et b^2-1 est divisible par 3

$(\exists k\in\mathbb{N});(\exists k'\in\mathbb{N})$ tels que : $a^2-1=3k$ et $b^2-1=3k'$

$ab\left(\left(a^2-1\right)-\left(b^2-1\right)\right)=ab\left(3k-3k'\right)=3ab\left(k-k'\right)=3k''$ Avec : $k'=ab\left(k-k'\right)\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^2$; $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

Exercice11 : Soit $n\in\mathbb{N}$ considérons : $P(n)=n^2+4n+7$

1)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}:(n+2)^2<P(n)<(n+3)^2$

2)En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}:\ \sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) $P(n)=n^2+4n+7=n^2+2\times n\times 2+2^2+3=(n+2)^2+3>(n+2)^2$

$P(n)=n^2+4n+7\prec n^2+6n+9$ en effet : $\left(n^2+6n+9\right)-\left(n^2+4n+7\right)=2n+2\succ 0$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $P(n)\prec n^2+2\times n\times 3+3^2$ c'est-à-dire : $P(n)<(n+3)^2$ et comme : $(n+2)^2<P(n)$

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}:(n+2)^2<P(n)<(n+3)^2$

2) Déduisons que $\forall n\in\mathbb{N}:\ \sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}:(n+2)^2<P(n)<(n+3)^2$ donc : $\sqrt{(n+2)^2}<\sqrt{P(n)}<\sqrt{(n+3)^2}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $|n+2|<\sqrt{P(n)}<|n+3|$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $n+2<\sqrt{P(n)}<n+3$ car $n+1\in\mathbb{N}$ et $n+2\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{P(n)}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs :

$n+2\ \ et\ \ n+3$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$

Exercice12 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*:\sqrt{4+2x^2}\neq 2+\dfrac{x^2}{2}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists x\in\mathbb{R}^*:\sqrt{4+2x^2}=2+\dfrac{x^2}{2}$

$$\sqrt{4+2x^2}=2+\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow 2x^2+4=4+2x^2+\frac{x^4}{4}\Leftrightarrow\frac{x^4}{4}=0\Leftrightarrow x^4=0\Leftrightarrow x=0\ !$$

C'est une contradiction car on sait que : $x\in\mathbb{R}^*$

Ceci signifie : $\forall x\in\mathbb{R}^*:\sqrt{4+2x^2}\neq 2+\dfrac{x^2}{2}$

Exercice13 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est un multiple de 11

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $3^{5\times 0}+4^{5\times 0+2}+5^{5\times 0+1}=1+16+5=22=2\times 11$

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}=11k$ donc : $\exists k \in \mathbb{N} / 3^{5n}=11k-4^{5n+2}-5^{5n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 3^{5n+5}+4^{5n+5+2}+5^{5n+5+1}=11k'$??

$3^{5n+5}+4^{5n+5+2}+5^{5n+5+1}=3^{5n}\times 3^5+4^{5n+2}\times 4^5+5^{5n+1}\times 5^5$

$=\left(11k-4^{5n+2}-5^{5n+1}\right)\times 3^5+4^{5n+2}\times 4^5+5^{5n+1}\times 5^5=11k\times 3^5-4^{5n+2}\times 3^5-5^{5n+1}\times 3^5+4^{5n+2}\times 4^5+5^{5n+1}\times 5^5$

$=11k\times 3^5+\left(4^5-3^5\right)4^{5n+2}+\left(5^5-3^5\right)5^{5n+1}=11k\times 3^5+(1024-243)4^{5n+2}+(3125-243)5^{5n+1}$

$=11k\times 3^5+781\times 4^{5n+2}+2882\times 5^{5n+1}=11k\times 3^5+71\times 11\times 4^{5n+2}+262\times 11\times 5^{5n+1}$

$=11\left(k\times 3^5+71\times 4^{5n+2}+262\times 5^{5n+1}\right)=11k'$ avec $k'=k\times 3^5+71\times 4^{5n+2}+262\times 5^{5n+1}\in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est un multiple de 11

Exercice14 : (Récurrence) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}.$$

Solution : Notons P(n) la proposition : "$S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{1-1}1^2=1$ et $\frac{1(1+1)}{2}(-1)^{1+1}=1\times(-1)^2=1$ c'est-à-dire : P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$??

Remarque : $(-1)^{n+2}=(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n\times 1=(-1)^n$ et

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1}k^2=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}k^2+(-1)^n(n+1)^2=S_n+(-1)^n(n+1)^2$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

Donc : $S_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}+(-1)^n(n+1)^2=\frac{1}{2}\left(-n(n+1)(-1)^n+2(-1)^n(n+1)^2\right)$

Car : $(-1)^{n+1}=(-1)^n\times(-1)^1=-(-1)^n$

Donc : $S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)(-1)^n(-n+2(n+1))=\frac{1}{2}(-1)^n(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-1)^n$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$.

Exercice15 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sqrt{n^2+n} \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+n} = m$

$\sqrt{n^2+n} = m \Leftrightarrow n^2+n = m^2 \Rightarrow \boxed{n^2 < m^2}$ car $m^2 - n^2 = n \succ 0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$n^2+n = m^2 \Rightarrow m^2 \prec n^2+2n+1$ car : $n^2+2n+1-m^2 = n^2+2n+1-\left(n^2+n\right) = n+1 \succ 0$

Donc : $\boxed{m^2 < (n+1)^2}$ et et comme : $\boxed{n^2 < m^2}$

On a alors : $n^2 < m^2 < (n+1)^2$ c'est-à-dire : $n < m < n+1$ et $m \in \mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n \ \ et \ \ n+1$

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}$

Exercice16 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{4n+3}{6} \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{4n+3}{6} = m$

$\dfrac{4n+3}{6} = m \Leftrightarrow 4n+3 = 6m \Rightarrow 3 = 6m-4n \Rightarrow 3 = 2(3m-2n) \Rightarrow 3 = 2k$ avec $k = 3m-2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 3$ est pair !. C'est une contradiction car on sait que : 3 est impair

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$

Autre procédure : $3 = 2(3m-2n) \Rightarrow 3 = 2k \Rightarrow$ 2 divise 3 $\Rightarrow$ absurde car on sait que : 2 ne divise pas 3

Exercice17 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \in \mathbb{Q}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ et $\exists r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que : $\sqrt{\dfrac{n}{n+2}} = r$

$r \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow \exists (a;b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que : $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$

$\sqrt{\dfrac{n}{n+2}} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow \dfrac{n}{n+2} = \dfrac{a^2}{b^2} \Rightarrow nb^2 = a^2(n+2) \Rightarrow nb^2 = a^2(n+2) \Rightarrow \dfrac{a(n+2)}{nb} = \dfrac{b}{a}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \ a(n+2) = kb$ et $nb = ka$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \dfrac{a}{b} = \dfrac{k}{n+2}$ et $\dfrac{n}{k} = \dfrac{a}{b}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \dfrac{k}{n+2} = \dfrac{n}{k} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \ n(n+2) = k^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \ n^2+2n = k^2$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \ n^2 \prec k^2 \prec n^2+2n+1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \ n^2 \prec k^2 \prec (n+1)^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \ n \prec k \prec n+1$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n \ \ et \ \ n+1$

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$

Exercice18 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I)\ 3\frac{x}{2}-1 \succ -\sqrt{\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5}$

Solution : On va Opérer par disjonction de cas :On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation :

$D=\left\{x\in\mathbb{R} / \frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5\geq 0\right\}$: $\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5$: le discriminant du trinôme est : $\Delta=\frac{9}{4}-4\times\frac{1}{2}\times 5=-\frac{31}{4}\prec 0$

Dans ce cas, le trinôme a toujours le signe du coefficient de x^2 : , donc strictement positif, et la Condition d'existence est toujours vérifiée. Le domaine de l'inéquation est $D=\mathbb{R}$

Pour la résolution, envisageons deux cas.

<u>Premier cas :</u> $3\frac{x}{2}-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{2}{3}$: Le premier membre de l'inégalité est positif tandis que le second est strictement négatif. L'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de x telles que : $x\geq\frac{2}{3}$

Donc : $S_1=\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$

<u>Second cas : Si</u> : $3\frac{x}{2}-1\prec 0 \Leftrightarrow x\prec\frac{2}{3}$: Les deux membres de l'inégalité sont négatifs. Pour progresser, il faut élever au carré les deux Membres de l'inéquation. Mais alors, il faut « retourner » l'inégalité !

Nous obtenons donc : $\left(3\frac{x}{2}-1\right)^2 \prec \frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5$ Développons …

$\frac{9x^2}{2}-3x+1\prec\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5 \Leftrightarrow \frac{7x^2}{4}-\frac{3x}{2}-4\prec 0$ Nous sommes ramenés à une inéquation du second degré :

le discriminant du trinôme est : $\Delta=\frac{9}{4}-4\times\frac{7}{4}\times(-4)=\frac{121}{4}$

Donc : $x_1=\frac{\frac{3}{2}-\frac{11}{2}}{\frac{7}{2}}$ et $x_2=\frac{\frac{3}{2}+\frac{11}{2}}{\frac{7}{2}}$ c'est-à-dire : $x_1=-\frac{8}{7}$ et $x_2=2$

Dressons le tableau de signes du trinôme, sans oublier d'y insérer la valeur $x=\frac{2}{3}$ puisqu'il faut tenir compte du fait que $x\prec\frac{2}{3}$

x		$-\frac{8}{7}$		$\frac{2}{3}$		2	
$\frac{7x^2}{4}-\frac{3}{2}x-4$	+	0	-	-	-	0	+

Le trinôme est strictement négatif lorsque : $-\frac{8}{7}\prec x\prec\frac{2}{3}$ donc : $S_2=\left]-\frac{8}{7};\frac{2}{3}\right[$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left[\frac{2}{3};+\infty\right[\cup\left]-\frac{8}{7};\frac{2}{3}\right[=\left]-\frac{8}{7};+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien