1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°21 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*
PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?
1) Si Marrakech et en France alors 3 − 2 = 2 ;
2) Soit Marrakech et en France, soit les grenouilles aboient ;
3) Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes ;
4) Si l'homme est un quadrupède, alors il parle ;
5) Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs ;
6. Marrakech est au Maroc ou Madrid est en chine.

Solution :1) Il s'agit, ici d'une implication.
« Marrakech et en France » est fausse et « 3−2 = 2 » est fausse, or la seule possibilité pour qu'une implication soit fausse est qu'une assertion vraie implique une assertion fausse, donc l'assertion 1 est vraie.
2) Une phrase, en français, du genre « soit..., soit... » se traduit mathématiquement par « ... ou... » « Marrakech et en France » est fausse et « les grenouilles aboient » est fausse donc l'assertion 2 est fausse.
3) « Les roses sont des animaux » est fausse et « les chiens ont 4 pattes » est vrai, donc l'assertion 3 est vraie.
4) « L'homme est un quadrupède » est faux et « il parle » est vrai, donc l'assertion 4 est vraie.
5) « Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » peut se traduire par « les roses ne sont pas des animaux et les roses ne sont pas des fleurs ». « Les roses ne sont pas des animaux » est vrai et « les roses ne sont pas des fleurs » est fausse donc « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs », donc l'assertion 5 est fausse.
6) « Marrakech est au Maroc » est vrai et « Madrid est en chine » est fausse, donc « Marrakech est au Maroc ou Madrid est en chine » est vraie.

Exercice 2 : Soit $P \text{ et } Q$ deux propositions.

Montrer que les propositions : " $non(P \Rightarrow Q)$ " et " $P \text{ et } \overline{Q}$ " sont équivalentes.

Solution : Il suffit d'établir les tables de vérité de ces deux propositions et de vérifier qu'elles sont identiques.
On a d'une part :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$non(P \Rightarrow Q)$
F	F	V	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	V	V	F

D'autre part :

P	Q	$\overline{Q}$	" $P \text{ et } \overline{Q}$ "
F	F	V	F
F	V	F	F
V	F	V	V
V	V	F	F

Les deux propositions sont bien équivalentes!

Exercice 3 : Déterminer la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes et (justifier vos réponses avec un raisonnement bien précis) :

1) $P_1 : \left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); x + \dfrac{16}{x} \succ 8$

2) $P_2 : \forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{n+5}{n+4} \neq 1$

3) $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}^*; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \dfrac{x}{5+x} \neq \dfrac{y}{5+y}$

4) $P_4 : \left(\forall n \in \mathbb{N}\right); n^2 + 3n + 2023$ est un entier impair

5) $P_5 : \forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}\ (x+3)(y-3) = (x-3)(y+3) \Rightarrow x = y$

6) $P_6 : \forall n \in \mathbb{N}$; $n^3 - n$ est divisible par 3

Solution : 1) On utilise un raisonnement par contre-exemple :

$\overline{P_1} : \left(\exists x \in \mathbb{R}^{*+}\right); x + \dfrac{16}{x} \leq 8$ est vraie

En effet : pour $\left(4 \in \mathbb{R}^{*+}\right)$ *et* $4 + \dfrac{16}{4} = 8 \leq 8$ ($x = 4$ est le contre-exemple)

La proposition $\overline{P_1}$: est vraie par suite P_1 :est **fausse**

Remarque : comment faire pour trouver ce contre-exemple ?

$$x + \frac{16}{x} \succ 8 \Leftrightarrow \frac{x^2+16}{x} \succ 8 \Leftrightarrow x^2 + 16 \succ 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 \succ 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \succ 0$$

Mais cette inégalité n'est pas vérifiée pour : $x = 4$

2)Montrons que : $P_2 :\ \forall n \in \mathbb{N} :\ \dfrac{n+5}{n+4} \neq 1$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$: Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{n+5}{n+4} = 1$

$\dfrac{n+5}{n+4} = 1 \Leftrightarrow n + 5 = n + 4 \Rightarrow 5 = 4$! C'est une contradiction car on sait que : $5 \neq 4$

Ceci signifie : $P_2 :\ \forall n \in \mathbb{N} :\ \dfrac{n+5}{n+4} \neq 1$ est vraie

$\overline{P_2} : \exists n \in \mathbb{N} : \dfrac{n+5}{n+4} = 1$

3) Montrons que : $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}^*; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \dfrac{x}{5+x} \neq \dfrac{y}{5+y}$ est vraie

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\dfrac{x}{5+x} = \dfrac{y}{5+y} \Rightarrow x = y$ est vraie

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ *et* $y \in \mathbb{R}^*$;

On a : $\dfrac{x}{5+x} = \dfrac{y}{5+y} \Rightarrow x(5+y) = y(5+x) \Rightarrow 5x + xy = 5y + xy \Rightarrow 5x = 5y \Rightarrow x = y$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*; \forall y \in \mathbb{R}^*\ \dfrac{x}{5+x} = \dfrac{y}{5+y} \Rightarrow x = y$

Alors par contraposition on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^*; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{5+x} \neq \frac{y}{5+y}$

Ceci signifie : $P_3 : \forall x \in \mathbb{R}^*; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{5+x} \neq \frac{y}{5+y}$ **est vraie**

$\overline{P_3} : \exists x \in \mathbb{R}^*; \exists y \in \mathbb{R}^* : x \neq y \text{ et } \frac{x}{5+x} = \frac{y}{5+y}$

4) $P_4 : (\forall n \in \mathbb{N}); n^2 + 3n + 2023$ est un entier impair

Remarque : Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de n , il est parfois utile de faire une **disjonction de cas** : on sépare le raisonnement suivant toutes les valeurs que peut prendre n.
On peut, par exemple, séparer les cas où n est un entier pair des cas où n est impair

Premier cas : si n est pair : alors n^2 est aussi pair (comme produit de nombres pairs)
Alors : $3n$ est pair (comme produit d'un nombre pair et un nombre impair)
Donc : $n^2 + 3n$ est pair (comme somme de nombres pairs)
D'autre part : 2023 est impair
Donc : $n^2 + 3n + 2023$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)

2 iem cas : si n est impair : alors n^2 est aussi impair (comme produit de nombres impairs)
Alors : $3n$ est impair (comme produit de nombres impairs)
Donc : $n^2 + 3n$ est pair (comme somme de nombres impairs)
D'autre part : 2023 est impair
Donc : $n^2 + 3n + 2023$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)
Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

P_4 : « $(\forall n \in \mathbb{N}); n^2 + 3n + 2023$ est un entier impair » **est vraie**

$\overline{P_4} : (\exists n \in \mathbb{N}) / n^2 + 3n + 2023$ est un entier pair

5) Montrons que : $P_5 : \forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R} \ (x+3)(y-3) = (x-3)(y+3) \Rightarrow x = y$ est vraie ?

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$;

On a : $(x+3)(y-3) = (x-3)(y+3) \Rightarrow xy - 3x + 3y - 6 = xy + 3x - 3y - 6$

$$\Rightarrow -6x = -6y \Rightarrow x = y$$

Donc : $(x+2)(y-2) = (x-2)(y+2) \Rightarrow x = y$

La proposition P_5 : est vraie

$\overline{P_5} : \exists x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} \ (x+3)(y-3) = (x-3)(y+3) \text{ et } x \neq y$

6) Montrons P_6 : « $\forall n \in \mathbb{N}$; $n^3 - n$ est divisible par 3 » est vraie ?

Utilisons un Raisonnement par récurrence :

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 3k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^3 - 0 = 0$ est un multiple de3
Donc P (0) est vraie.
L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$
2étapes : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 3k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 - (n+1) = 3k'$??

$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1$

$=(n^3-n)+3n^2+3n=3k+3(n^2+n)=3(k+n^2+n)=3k'$ Avec $k'=k+n^2+n\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : P_6 : « $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 3 » est vraie

$\overline{P_6}$: « $\exists n\in\mathbb{N}$; n^3-n n'est pas divisible par 3 »

Exercice 4 : Montrer que : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$: $\left(b>a\Rightarrow b^2-a^2\geq 3\right)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par implications :

Soit : $(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$; Supposons que : $b>a$ et Montrons que : $b^2-a^2\geq 3$

On a : $b>a\Rightarrow b\geq a+1\Rightarrow b^2\geq(a+1)^2\Rightarrow b^2\geq a^2+2a+1\Rightarrow b^2-a^2\geq 2a+1$

Or : $a\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a\geq 1\Rightarrow 2a\geq 2\Rightarrow 2a+1\geq 3$

Alors : $b^2-a^2\geq 2a+1\geq 3$ c'est-à-dire : $b^2-a^2\geq 3$

Conclusion : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$: $\left(b>a\Rightarrow b^2-a^2\geq 3\right)$

Exercice 5 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}\in\mathbb{N}$

Solution : il suffit de montrer que : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré parfait

C'est-à-dire : de montrer que : $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=m^2$

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+n)(n^2+3n+2n+6)+1=(n^2+n)(n^2+5n+6)+1$

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2)^2+6n^3+11n^2+6n+1=(n^2)^2+2\times n^2\times 3n+(3n)^2+2n^2+6n+1$

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)^2+2n^2+6n+1=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)\times 1+1^2$

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$

$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=\sqrt{(n^2+3n+1)^2}=n^2+3n+1\in\mathbb{N}$ car $n\in\mathbb{N}$

Soit : $(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$; Supposons que : $b>a$ et Montrons que : $b^2-a^2\geq 3$

On a : $b>a\Rightarrow b\geq a+1\Rightarrow b^2\geq(a+1)^2\Rightarrow b^2\geq a^2+2a+1\Rightarrow b^2-a^2\geq 2a+1$

Or : $a\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a\geq 1\Rightarrow 2a\geq 2\Rightarrow 2a+1\geq 3$

Alors : $b^2-a^2\geq 2a+1\geq 3$ c'est-à-dire : $b^2-a^2\geq 3$

Conclusion : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^{*2}$: $\left(b>a\Rightarrow b^2-a^2\geq 3\right)$

Exercice 6 : Montrer par disjonction des cas que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{n^{2024}+1+(n+1)^{2025}}{2}\in\mathbb{N}$

Solution : il suffit de montrer que : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est un entier pair

Remarque : Lorsque la démonstration d'une propriété dépend de la valeur de x, il est parfois utile de faire une **disjonction de cas** : on sépare le raisonnement suivant toutes les valeurs que peut prendre x.
On peut, par exemple, séparer les cas où x est un entier pair des cas où x est impair, ou encore séparer les cas où x est un réel positif des cas où il est strictement négatif.

Premier cas : si n est pair : alors n^{2024} est aussi pair (comme produit de nombres pairs)
Alors : $n^{2024}+1$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)
D'autre part : $n+1$ est impair (comme somme d'un nombre pair et un nombre impair)
Alors : $(n+1)^{2025}$ est aussi impair (comme produit de nombres impairs)
Donc : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est pair (comme somme de nombres impairs)

2 iem cas : si n est impair : alors n^{2024} est aussi impair (comme produit de nombres impairs)
Alors : $n^{2024}+1$ est pair (comme somme d'un nombre impair et un nombre impair)
D'autre part : $n+1$ est pair (comme somme d'un nombre impair et un nombre impair)
Alors : $(n+1)^{2025}$ est aussi pair (comme produit de nombres pairs)
Donc : $n^{2024}+1+(n+1)^{2025}$ est pair (comme somme de nombres pairs)
Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \frac{n^{2024}+1+(n+1)^{2025}}{2}\in\mathbb{N}$$

Exercice 7: $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$:Montrer que : $|2x^2+5xy+3y^2|\le 3\Rightarrow|x+y|\le\sqrt{3}\ \ ou\ \ |2x+3y|\le\sqrt{3}$

Solution : Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $|x+y|\succ\sqrt{3}\ \ et\ \ |2x+3y|\succ\sqrt{3}\Rightarrow|2x^2+5xy+3y^2|\succ 3$

$$|x+y|\succ\sqrt{3}\ \ et\ \ |2x+3y|\succ\sqrt{3}\Rightarrow|2x+3y||x+y|\succ\sqrt{3}\times\sqrt{3}\quad\Rightarrow|(2x+3y)(x+y)|\succ 3$$
$$\Rightarrow|2x^2+3xy+2xy+3y^2|\succ 3\quad\Rightarrow|2x^2+5xy+3y^2|\succ 3$$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ \ |x+y|\succ\sqrt{3}\ \ et\ \ |2x+3y|\succ\sqrt{3}\Rightarrow|2x^2+5xy+3y^2|\succ 3$

Alors : Par contraposition : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$|2x^2+5xy+3y^2|\le 3\Rightarrow|x+y|\le\sqrt{3}\ \ ou\ \ |2x+3y|\le\sqrt{3}$

Exercice 8 : Montrer par équivalence que : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\ ;\ a^2+b^2+c^2\ge a\times b+a\times c+b\times c$

Solution : Nous raisonnons par équivalence : Soit : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

$$a^2+b^2+c^2\ge a\times b+a\times c+b\times c\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\ge 2(a\times b+a\times c+b\times c)$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2a\times b-2a\times c-2b\times c\ge 0$$
$$\Leftrightarrow(a^2-2a\times b+b^2)+(a^2-2a\times c+c^2)+(b^2-2b\times c+c^2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0\text{ ; (vraie)}$$

Donc : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\ ;\ a^2+b^2+c^2\ge a\times b+a\times c+b\times c$

Exercice 9 : 1) a) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):|a+b|\le|a|+|b|$

b) Déduire que : $\left(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right):\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\Rightarrow|a|\prec c\ et\ |b|\prec c$

2) Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)(\forall y\in[1;+\infty[):\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}$

Solution : 1) a) Montrons que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):|a+b|\le|a|+|b|$ (l'inégalité triangulaire)

Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$|a+b|\le|a|+|b|\Leftrightarrow|a+b|^2\le(|a|+|b|)^2\Leftrightarrow(a+b)^2\le|a|^2+|b|^2+2|a|\times|b|$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\le a^2+b^2+2|a|\times|b|$ car $|X|^2=X^2$

$\Leftrightarrow 2ab\le 2|a|\times|b|\Leftrightarrow ab\le|ab|$ Comme $ab\le|ab|$ est une proposition vraie : $X\le|X|$

Alors $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):|a+b|\le|a|+|b|$ est aussi vraie

b) Soit : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$: Supposons que : $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$

On a : $\left|\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right|\le\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ c'est-à-dire : $|a|\le\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ et comme : $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$

Alors : $|a|\prec c$

On a aussi : $\left|\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\right|\le\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{b-a}{2}\right|$ c'est-à-dire : $|b|\le\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$ car $|a-b|=|b-a|$ et comme :

$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c$ alors $|b|\prec c$

Conclusion : $\left(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right):\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\Rightarrow|a|\prec c\ et\ |b|\prec c$

2)Soit : $(x;y)\in\left([1;+\infty[\right)^2$: Utilisons un Raisonnement par équivalence :

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2\le\sqrt{xy}^2$

$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}+y-1\le xy\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{xy-x-y+1}+y-1\le xy$

$\Leftrightarrow 0\le xy-x-y+1-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2\Leftrightarrow 0\le\sqrt{xy-x-y+1}^2-2\sqrt{xy-x-y+1}+1^2$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy-x-y+1}-1\right)^2\ge 0$ est une proposition vraie

Donc : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right)\left(\forall y\in[1;+\infty[\right):\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\le\sqrt{xy}$

Exercice 10 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$ $S_n=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

Solution : Notons P(n) la proposition : " $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $S_0=\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^k a^k=(-1)^0 a^0=1$ et $\frac{a^1+1}{a+1}=1$

Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\frac{a^{2n+3}+1}{a+1}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k a^k+(-1)^{2n+1}a^{2n+1}+(-1)^{2n+2}a^{2n+2}$

Remarque : $(-1)^{2n+2}=1$ car $2n+2$ pair et $(-1)^{2n+1}=-1$ car $2n+1$ impair

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}-a^{2n+1}+a^{2n+2}=\frac{a^{2n+1}+1-a^{2n+1}(a+1)+a^{2n+2}(a+1)}{a+1}$

$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=2n+2}(-1)^k a^k=\frac{a^{2n+1}+1-a^{2n+2}-a^{2n+1}+a^{2n+3}+a^{2n+2}}{a+1}=\frac{a^{2n+3}+1}{a+1}$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall a \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k a^k = \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}.$$

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$ considérons : $q(n) = 9n^2 + 13n + 5$

1)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}: (3n+2)^2 < q(n) < (3n+3)^2$

2)En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt{q(n)} \notin \mathbb{N}$

Solution : 1) $q(n) = 9n^2 + 13n + 5 = (3n)^2 + 2\times 3n \times 2 + 2^2 + n + 1 = (3n+2)^2 + n + 1 > (3n+2)^2$

$q(n) = 9n^2 + 13n + 5 \prec 9n^2 + 18n + 9$ en effet : $(9n^2 + 18n + 9) - (9n^2 + 13n + 5) = 5n + 4 \succ 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $q(n) \prec (3n)^2 + 2\times 3n \times 3 + 3^2$ c'est-à-dire : $q(n) < (3n+3)^2$ et comme : $(3n+2)^2 < q(n)$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}: (3n+2)^2 < q(n) < (3n+3)^2$

2) Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}:$ $\sqrt{q(n)} \notin \mathbb{N}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}: (3n+2)^2 < q(n) < (3n+3)^2$ donc : $\sqrt{(3n+2)^2} < \sqrt{q(n)} < \sqrt{(3n+3)^2}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $|3n+2| < \sqrt{q(n)} < |3n+3|$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $3n+2 < \sqrt{q(n)} < 3n+3$ car $3n+2 \in \mathbb{N}$ et $3n+3 \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{q(n)}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs :

$3n+2$ et $3n+3$ Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt{q(n)} \notin \mathbb{N}$

Exercice 12 : Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{Z}: \frac{8n+2025}{10} \notin \mathbb{Z}$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{8n+2025}{10} \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{Z}$ et $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{8n+2025}{10} = m$

$$\frac{8n+2025}{10} = m \Leftrightarrow 8n + 2025 = 10m \Rightarrow 2025 = 10m - 8n \Rightarrow 2025 = 2(5m-4n) \Rightarrow 2025 = 2k$$

avec $k = 5m - 4n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow 2025$ est pair

C'est une contradiction car on sait que : 2025 est impair

Ceci signifie : $\forall n \in \mathbb{Z}: \frac{8n+2025}{10} \notin \mathbb{Z}$

Exercice13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante (I): $\sqrt{x+4} \succ x+1$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation (I): $\sqrt{x+4} \succ x+1$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x+4 \geq 0\} = [-4;+\infty[$

$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Soit $x \in [-4;+\infty[$ et S l'ensemble des solutions de (I)

$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x+4} \succ x+1$

1 cas : si $x+1 \prec 0 \Leftrightarrow x \prec -1$

Donc : l'Inéquation est vraie pour tout $x \in [-4;-1[$

Donc $S_1 = [-4;-1[$

2 cas : si $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ alors $x+1 \geq 0$

$\sqrt{x+4} \succ x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2 \succ (x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+4-\left(x^2+2x+1\right) \succ 0 \Leftrightarrow -x^2-x+3 \succ 0 \Leftrightarrow x^2+x-3 \prec 0$; $\Delta = 1-4(-3) = 13$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \approx 7,3$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \approx 3,7$

$x^2+x-3 \prec 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$ Donc $S_2 = \left]\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[\cap [-1;+\infty[= \left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$

Donc : $S = S_1 \cup S_2 = [-4;-1[\cup \left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[= \left[-4;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien