1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°20 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la négation des propositions suivantes :

$P:(\exists m\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}^+);\frac{1+\sqrt{x}}{2}\le m$

$Q:\ ((\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^+);x+y\succ xy$

$R:(\forall x\in\mathbb{R});\frac{x}{1+x^2}\le\frac{1}{2}$

$S:(\forall x\notin\mathbb{Q});x+\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$T:(\exists x\notin\mathbb{Q})(\exists y\notin\mathbb{Q});xy\in\mathbb{Q}$

$U:(\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R}):a^2+b^2=1$

Solution : $\overline{P}:\ (\forall m\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}^+);\frac{1+\sqrt{x}}{2}\succ m$

$\overline{Q}:\ ((\exists x\in\mathbb{R}^+)(\exists y\in\mathbb{R}^+);x+y\le xy$

$\overline{R}:(\exists x\in\mathbb{R});\frac{x}{1+x^2}\succ\frac{1}{2}$

$\overline{S}:(\exists x\notin\mathbb{Q});x+\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

$\overline{T}:(\forall x\notin\mathbb{Q})(\forall y\notin\mathbb{Q});xy\notin\mathbb{Q}$

$\overline{U}:(\exists a\in\mathbb{R})(\forall b\in\mathbb{R}):a^2+b^2\ne1$

Exercice2 : Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et donner leurs négations des 4 premiers propositions :

1) $P_1:(\forall x\in\mathbb{Z})(\exists y\in\mathbb{Z});x-y=2024$

2) $P_2:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in]-\infty;2[);3x^2y-x+2y=0$

3) $P_3:(\forall x\in[0;2])(\exists y\in[0;1]);xy-x+2y-1=0$

4) $P_4:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x+2023\prec y^2$

5) $P_5:(\exists! x\in[-1;0]):x^2+4x+1=0$

Solution : 1) Soit $x\in\mathbb{Z}$existe-t-il y dans $\mathbb{Z}$ tel que : $x-y=2024$?

On a : $x-y=2024\Leftrightarrow y=x-2024\in\mathbb{Z}$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{Z})(\exists y=x-2024\in\mathbb{Z});x-y=2024$

Donc : la proposition P_1 : est vraie.

$\overline{P_1}:(\exists x\in\mathbb{Z})(\forall y\in\mathbb{Z});x-y\ne2024$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$; existe-t-il y dans $]-\infty;2[$ tel que : $3x^2y-x+2y=0$?

$3x^2y-x+2y=0\Leftrightarrow y(3x^2+2)=x\Leftrightarrow y=\frac{x}{3x^2+2}$

Il reste à montrer que : $y\in]-\infty;2[$

$y-2=\frac{x}{3x^2+2}-2=\frac{x-6x^2-4}{3x^2+2}=-\frac{6x^2-x+4}{3x^2+2}$

On a : $6x^2-x+4\succ 0$ car $\Delta=-47\prec 0$ et $a=6\succ 0$ et on a : $3x^2+2\succ 0$

Donc : $y-2\prec 0$ c'est-a-dire : $y\prec 2$

Par suite : la proposition P_2: est vraie.

$\overline{P_2}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in]-\infty;2[);3x^2y-x+2y\neq 0$

3) Soit $x\in[0;2]$; existe-t-il y dans $[0;1]$ tel que : $xy-x+2y-1=0$?

$xy-x+2y-1=0\Leftrightarrow xy+2y=1+x\Leftrightarrow y(x+2)=1+x\Leftrightarrow y=\frac{1+x}{x+2}=1-\frac{1}{x+2}$

Il reste à montrer que : $y\in[0;1]$ Comme : $0\leq x\leq 2$ alors : $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{x+2}\leq\frac{1}{2}$ donc : $1-\frac{1}{2}\leq 1-\frac{1}{x+2}\leq 1-\frac{1}{4}$

D'où : $y\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ et $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\subset[0;1]$

Par suite : la proposition P_3 : est vraie.

$\overline{P}_3:(\exists x\in[0;2])(\forall y\in[0;1]);xy-x+2y-1\neq 0$

4) $P_4:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x+2023\prec y^2$

il suffit de prendre : $x=-2024$ et on trouve : $(\forall y\in\mathbb{R});-1\prec y^2$ (vraie)

Par suite : la proposition P_4 : est vraie.

$\overline{P_4}:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});x+2023\geq y^2$

5) $P_5:(\exists!x\in[-1;0])(\exists y\in\mathbb{R}):x^2y+4xy+1=0$

Si on prend : $y=1$: on retrouve la proposition : $(\exists!x\in[-1;0]):x^2+4x+1=0$?

$\Delta=16-4=12\succ 0$: $x_1=\frac{-4+\sqrt{12}}{2}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}\approx-0,26\in[-1;0]$ et $x_2=\frac{-4+\sqrt{12}}{2}=-2-\sqrt{3}\notin[-1;0]$

Par suite : $(\exists!x\in[-1;0]):x^2+4x+1=0$ est vraie

Conclusion : $P_9:(\exists!x\in[-1;0])(\exists y\in\mathbb{R}):x^2y+4xy+1=0$ est vraie

$P_5:(\exists!x\in[-1;0])(\exists y\in\mathbb{R}):x^2y+4xy+1=0$

Exercice3 : Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $P:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});x+y=1$

2) $Q:(\forall x\in\{1;2\})(\exists y\in\{-2;-1;0\})/x+y=0$

3) $R:(\forall x\in\{-2;-1;0\})(\exists y\in\{1;2\})/x+y=0$

Solution :1) $P:(\exists x=0\in\mathbb{R})(\exists x=1\in\mathbb{R});0+1=1$

Donc : P est une proposition vraie

2) $Q:(\forall x\in\{1;2\})(\exists y\in\{-2;-1;0\})/x+y=0$

Si : $x=1$; $\exists y=-1$ $/1+(-1)=0$

Si : $x=2$; $\exists y=-2$ $/2+(-2)=0$

Donc : $Q:(\forall x\in\{1;2\})(\exists y\in\{-2;-1;0\})/x+y=0$ est une proposition vraie

3) $R:\left(\forall x\in\{-2;-1;0\}\right)\left(\exists y\in\{1;2\}\right)/\,x+y=0$

$\overrightarrow{R}:\left(\exists x\in\{-2;-1;0\}\right)\left(\forall y\in\{1;2\}\right)/\,x+y\neq 0$

$\left(\exists x=0\right)\left(\forall y\in\{1;2\}\right)/\,0+y\neq 0$

$\overrightarrow{R}$: est une proposition vraie par suite : R est fausse

REMARQUE : L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs change la signification et la valeurs de vérité d'une proposition

Exercice4 : 1) Montrer que : les assertions : $P\wedge\overline{Q}$ et $\overline{P\Rightarrow Q}$ sont équivalentes

2) Soit la proposition suivante : R "$(1=2)\Rightarrow(2=3)$"

Donner la négation la valeur de vérité de la proposition R

Solution : Méthode1 :

A l'aide de la méthode des tables de vérité :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}\vee Q$	$\overline{P\Rightarrow Q}$	$P\wedge\overline{Q}$
V	V	F	F	V	**F**	**F**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**F**	**F**
F	F	V	V	V	**F**	**F**

Donc : $P\wedge\overline{Q}$ et $\overline{P\Rightarrow Q}$ sont équivalentes

Méthode2 : $\overline{P\Rightarrow Q}\Leftrightarrow\overline{\overline{P}\vee Q}\Leftrightarrow P\wedge\overline{Q}$

Donc : les assertions : $P\wedge\overline{Q}$ et $\overline{P\Rightarrow Q}$ sont équivalentes

2) $\overline{P\Rightarrow Q}\Leftrightarrow\overline{\overline{P}\vee Q}\Leftrightarrow P\wedge\overline{Q}$

La négation de la proposition : $(1=2)\Rightarrow(2=3)$ est $(1=2)$ *et* $(2\neq 3)$ qui est faux

Donc : $(1=2)\Rightarrow(2=3)$ est une proposition vraie

Exercice5 : Choisir la bonne réponse ?

Quelle est la négation de « Je vais à la plage et il pleut » ?

A. Je ne vais pas à la plage et il pleut

B. Je vais à la plage et il ne pleut pas

C. Je vais à la plage ou il pleut

D. Je ne vais pas à la plage ou il ne pleut pas

Solution : La négation de « et » est « ou », donc la négation de « Je vais à la plage et il pleut » est : « Je ne vais pas à la plage ou il ne pleut pas ».

La solution est donc : D.

Exercice6 : Quelle est la négation de « Certains chiens mordent » ?

A. Tous les chiens mordent

B. Aucun chien ne mord

C. Certains chiens ne mordent pas

D. Il existe un chien qui ne mord pas

Solution :

La négation de « Certains chiens mordent » est : « Aucun chien ne mord ».

La solution est donc : B.

Exercice7 : Quelle est la négation de « Si tu me parles alors je t'écoute »

Solution : La négation est : « Tu me parles et je ne t'écoute pas

Exercice8 : 1) Quelle est la négation de « Tous les étudiants sont sérieux. » ?

2) Quelle est la négation de « Les employés sont tous présents et appliqués. » ?

Solution :1) « au moins un étudiant n'est pas sérieux. »

2) au moins un employé n'est pas présent ou n'est pas appliqué.

Exercice9 : Les footballeurs français portent un maillot bleu.

Un joueur porte un maillot Vert, est-ce un footballeur français ?

A. oui B. non C. on ne peut pas savoir

Solution :

- Soit A : « le footballeur est français » et B : « le footballeur porte un maillot bleu ».
- Si le joueur porte un maillot vert, alors on nie B et si on nie B, alors on nie A.
- Si on nie A alors « le joueur n'est pas un footballeur français »
- La solution est donc : B.

Astuces des Malins : Les phrases suivantes sont équivalentes :

- Si on affirme A, alors on affirme B.
- Si on nie B, alors on nie A.

Par contre :

- Si on affirme B, alors on ne peut rien dire sur A.
- Si on nie A, alors on ne peut rien dire sur B.

Exercice 1 : Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x - y = 1$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x - 1 \in \mathbb{R}$. On a alors $x - y = x - (x - 1) = 1$.

Ceci démontre : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x - y = 1$.

Exercice10 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{y^2 - y + 1} \Rightarrow x = y \text{ ou } x + y = 1$

Solution : Soient : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

On a : $\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{y^2 - y + 1} \Rightarrow x^2 - x + 1 = y^2 - y + 1$

$\Rightarrow x^2 - y^2 - (x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) - (x - y) = 0$

$\Rightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \text{ ou } x + y - 1 = 0$

$\Rightarrow x = y \text{ ou } x + y = 1$

Donc : $\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{y^2 - y + 1} \Rightarrow x = y \text{ ou } x + y = 1$

Exercice11 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq 3 \text{ et } y \neq 3 \Rightarrow 3x + 3y - xy - 3 \neq 6$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $3x + 3y - xy - 3 = 6 \Rightarrow x = 3$ ou $y = 3$

On a : $3x + 3y - xy - 3 = 6 \Rightarrow 3x + 3y - xy - 9 = 0$

$\Rightarrow x(3 - y) - 3(3 - y) = 0 \Rightarrow (3 - y)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow 3 - y = 0$ ou $x - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $x = 3$

Donc : $x \neq 3 \text{ et } y \neq 3 \Rightarrow 3x + 3y - xy - 3 \neq 6$

Exercice12 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$??

On a : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$

$\Rightarrow -2x = -2y \Rightarrow x = y$

Donc : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exercice13 : $x \neq -5$: Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \notin \left]-\infty; -3\right[$ et $x \notin \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 \leq 0$

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x^2+5x-3\succ 0 \Rightarrow x\in \left]-\infty;-3\right[$ ou $x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\Delta = 5^2-4\times(-3)\times 2 = 49 \succ 0$

Donc : deux racines : $x_1 = \frac{-5+\sqrt{49}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-5-\sqrt{49}}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		$1/2$		$+\infty$
$2x2+5x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2x^2+5x-3\succ 0$ *si* $x\in \left]-\infty;-3\right[$ ou $x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $2x^2+5x-3\succ 0 \Rightarrow x\in \left]-\infty;-3\right[$ ou $x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Alors : Par contraposition : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x\notin \left]-\infty;-3\right[$ et $x\notin \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\Rightarrow 2x^2+5x-3\le 0$

Exercice14 : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$

Montrer que si : $x^2+4yz+2z=0$ et $x+2xy+2z^2=0$

Alors : $2xz+y^2+y+1\neq 0$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $2xz+y^2+y+1=0$

On a d'une part : $\begin{cases} x^2+4yz+2z=0 \\ x+2xy+2z^2=0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} z(2y+1)=0 \\ x(2y+1)=0 \end{cases}$

Donc : x et z ont le même signe

D'autre part On a: $y^2+y+1\succ 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}$

Donc : $2xz\prec 0$

Donc : x et z ont des signes contraires : Contradiction

Conclusion : $2xz+y^2+y+1\neq 0$

Exercice15 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Solution : ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que :

$\forall x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\le M$

$f(x)\le M \Rightarrow x^2+2x\le M \Rightarrow x^2+2x+1\le M+1$

$\Rightarrow (x+1)^2\le M+1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2}\le\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow |x+1|\le\sqrt{M+1} \Rightarrow -\sqrt{M+1}\le x+1\le\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow -\sqrt{M+1}-1\le x\le\sqrt{M+1}-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que :

$\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Exercice16 : Soient $x \in \mathbb{R}^{*+}$; $y \in \mathbb{R}^{*+}$; On pose : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$; $x+y=1$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (l'inégalité arithmético-géométrique)

b) Déduire que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$

2) Montrer que : $A\geq(a+1)^2$

3) Déduire que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

Solution : 1) a) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}\Leftrightarrow \sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$ Proposition vraie

Donc : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

2) Soit $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

On a : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right)$: $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ et puisque : $\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^{*+}$ et $\frac{1}{y}\in\mathbb{R}^{*+}$ on appliquant cette inégalité

On a donc : $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ donc : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\frac{1}{\sqrt{xy}}$ et comme : $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}$

Alors : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$

2) Montrons que : $A\geq(a+1)^2$

On a : $A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}$ et comme : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2a$ et $a=\frac{1}{\sqrt{xy}}\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{xy}$

Donc : $1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}\geq 1+2a+a^2$ c'est-à-dire : $A\geq(a+1)^2$

3) Déduisons que : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

On a : $A\geq(a+1)^2$ c'est-à-dire : $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq(a+1)^2$

Or on a : $x+y=1$ et $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ donc : $\frac{1}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq 2\Rightarrow a\geq 2$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq(a+1)^2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq(2+1)^2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

Exercice17 : Montrer que : $\left(\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\right): x+y+z=0\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$

$x+y+z=0\Leftrightarrow x+y=-z\Leftrightarrow(x+y)^3=(-z)^3\Leftrightarrow x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=-z^3$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)$ or $(x+y=-z)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3xy(-z)=3xyz$

Exercice18 : Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$; $n^3 - n$ est divisible par 3.

Indication : Etudier les cas : $n = 3k$; $n = 3k+1$ et $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$: $n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = n(n-1)(n+1)$

Il y'a trois façons d'écrire n : $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec : $k \in \mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n = 3k$: $n^3 - n = 3k(3k-1)(3k+1) = 3\left(k(3k-1)(3k+1)\right) = 3k'$ avec : $k' = k(3k-1)(3k+1) \in \mathbb{N}$

Donc : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n = 3k+1$: $n^3 - n = (3k+1)(3k+1-1)(3k+1+1)$

$= (3k+1)(3k)(3k+2) = 3\left(k(3k+1)(3k+2)\right) = 3k'$ avec : $k' = k(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}$

Donc : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi

3ére cas : si $n = 3k+2$

$n^3 - n = (3k+2)(3k+2-1)(3k+2+1) = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3\left((k+1)(3k+1)(3k+2)\right) = 3k'$

Avec : $k' = (k+1)(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par

Disjonction des cas le nombre $n^3 - n$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice19 : 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 Par 5 est : $E = \{0;1;4\}$

2) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12} \notin \mathbb{N}$

Solution : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : 5 cas possibles seulement pour n

$n = 5k$ ou $n = 5k+1$ ou $n = 5k+2$ ou $n = 5k+3$ ou $n = 5k+4$ avec $k \in \mathbb{N}$

<u>1ére cas :</u> $n = 5k$ alors $n^2 = (5k)^2 = 25k^2 = 5\times\left(5k^2\right) = 5k' = 5k' + 0$

Donc : 0 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

<u>2ére cas :</u> $n = 5k+1$ alors $n^2 = (5k+1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5\times\left(5k^2 + 2k\right) + 1 = 5k' + 1$

Donc : 1 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

<u>3ére cas :</u> $n = 5k+2$ alors $n^2 = (5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5\times\left(5k^2 + 4k\right) + 4 = 5k' + 4$

Donc : 4 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

<u>4ére cas :</u> $n = 5k+3$ alors $n^2 = (5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = \left(25k^2 + 30k + 5\right) + 4$

$n^2 = (5k+3)^2 = 5\times\left(5k^2 + 6k + 1\right) + 4 = 5k' + 4$

Donc : 4 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

<u>5ére cas :</u> $n = 5k+4$ alors $n^2 = (5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = \left(25k^2 + 40k + 15\right) + 1$

$n^2 = (5k+4)^2 = 5\times\left(5k^2 + 8k + 3\right) + 1 = 5k' + 1$

Donc : 1 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

Donc : L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 Par 5 est : $E = \{0;1;4\}$

2)Nous raisonnons par l'absurde en supposant : $\exists k \in \mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12} \in \mathbb{N}$

Donc : $\exists k \in \mathbb{N}$ et $\exists n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12} = n$

Donc : $\exists k \in \mathbb{N}$ et $\exists n \in \mathbb{N}$; $5k + 12 = n^2$

Donc : $\exists k \in \mathbb{N}$ et $\exists n \in \mathbb{N}$; $5k + 10 + 2 = n^2$

Donc : $\exists k \in \mathbb{N}$ et $\exists n \in \mathbb{N}$; $5(k+2) + 2 = n^2$

Donc : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que 2 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

Nous obtenons donc une contradiction avec la faite que : L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 par 5 est : $E=\{0;1;4\}$ car 2 ne peut pas être le reste de la division euclidienne de n^2 par 5

Exercice20 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\sqrt{n^2+7n+12}\notin\mathbb{N}$

Solution : Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+7n+12}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+7n+12}=m$

$\sqrt{n^2+7n+12}=m \Leftrightarrow n^2+7n+12=m^2 \Leftrightarrow n^2+6n+9+n+3=m^2 \Leftrightarrow (n+3)^2+n+3=m^2$

et donc : $(n+3)^2 \prec m^2$ et comme : $(n+4)^2=n^2+8n+16$

Alors : $(n+4)^2-m^2=(n^2+8n+16)-(n^2+7n+12)=n+4\succ 0$

On a alors : $(n+3)^2\prec m^2\prec(n+4)^2$ c'est-à-dire : $n+3\prec m\prec(n+3)+1$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n+3 \; et \; n+4$

Ceci signifie : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\sqrt{n^2+7n+12}\notin\mathbb{N}$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; 7^n-1 est divisible par 6

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $7^0-1=0$ est un multiple de 6

Donc P (0) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 7^n-1=6k$

3étapes : Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N} / 7^{n+1}-1=6k'$??

$7^{n+1}-1=7\times7^n-1=7^n\times(6+1)-1=6\times7^n+7^n-1=6\times7^n+6k$

$7^{n+1}-1=6(7^n+k)=6k'$ avec $k'=7^n+k$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; 7^n-1 est divisible par 6

Exercice22 : Montrer par récurrence que : pour tout entier $n\geq5$: $2^n\geq6n$

Solution : Notons P(n) La proposition : « $2^n\geq6n$ »

1étape : Pour $n=5: 2^5=32$ et $6\times5=30$

Donc $2^5\geq6\times5$ c'est-à-dire : P(5) est vraie.

2étape : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\geq6n$

3étapes : Montrons alors que : $2^{n+1}\geq6(n+1)$??

Or, puisque $2^n\geq6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

Donc : $2^n\times2\geq6n\times2$ donc $2^{n+1}\geq12n$ **(1)**

Or on remarque que : $12n\geq6(n+1)$ **(2)**

En effet : $12n-6(n+1)=6n-6\geq0$

Car : $n\geq5$ donc $6n\geq30$ alors $6n-6\geq24\geq0$

On conclut par récurrence que : Pour tout $n\geq5$: $2^n\geq6n$

Exercice23 : Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2\times(n+1)^2}{4}$.

Solution : Notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : Pour n=1 nous avons $1^3 = \frac{1^2 \times (1+1)^2}{4} = 1$

Donc $1 = 1$. c'est a dire : P(0) est vraie.

2étapes : Supposons que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 \times (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$??

On a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + (n+1)^3$

et on a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right)$

$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $n \in \mathbb{N}^*$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien