1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°2 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P_1 : "$\left(\frac{17}{5}=3,4\right)$ et $\left(\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1\right)$"
2) P_2 : "$(0=1)$ ou $(-1\prec 0)$"
3) P_3 : "$\left(\frac{35}{5}\in\mathbb{N}\right)$ et $\left(1\notin[0,1]\right)$"
4) P_4 : "$(11$ *n'est pas premier*$)$ ou $(\cos\pi=1)$"
5) P_5 : "$\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow\left(0\notin[0,1]\right)$"
6) P_6 : "$\left(0\notin\mathbb{N}^*\right)\Rightarrow(3$ *est pair*$)$"
7) P_7 : "$\left(0\notin\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow(3$ *est pair*$)$"
8) P_8 : "$(0=1)\Leftrightarrow(-1\geq 0)$"

Solution : 1) P_1 : "$\left(\frac{17}{5}=3,4\right)$ et $\left(\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1\right)$"

P_1 : est vraie car $\left(\frac{17}{5}=3,4\right)$ vraie et $\left(\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1\right)$ vraie

$\overline{P_1}$: "$\left(\frac{17}{5}\neq 3,4\right)$ ou $\left(\left|\sqrt{5}-1\right|\neq\sqrt{5}-1\right)$"

2) P_2 : "$(0=1)$ ou $(-1\prec 0)$"

P_2 : est vraie car $(0=1)$ est fausse et $(-1\prec 0)$ est vraie

$\overline{P_2}$: "$(0\neq 1)$ et $(-1\geq 0)$"

3) P_3 : "$\left(\frac{35}{5}\in\mathbb{N}\right)$ et $\left(1\notin[0,1]\right)$"

P_3 : est fausse car $\left(\frac{35}{5}=7\in\mathbb{N}\right)$ est vraie et $\left(1\notin[0,1]\right)$ est fausse

$\overline{P_3}$: "$\left(\frac{35}{5}\notin\mathbb{N}\right)$ ou $\left(1\in[0,1]\right)$"

4) P_4 : "$(11$ *n'est pas premier*$)$ ou $(\cos\pi=1)$"

P_4 : est fausse car $(11$ *n'est pas premier*$)$ est fausse et $(\cos\pi=1)$ est fausse   Req : $(\cos\pi=-1)$

$\overline{P_4}$: "$(11$ *est premier*$)$ et $(\cos\pi\neq 1)$"

5) P_5 : "$\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow\left(0\notin[0,1]\right)$"

P_5 : est vraie car $\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$ est fausse et $\left(0\notin[0,1]\right)$ est fausse

$\overline{P_5}$: "$\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$ et $\left(0\in[0,1]\right)$"

Car : non "$p\Rightarrow q$" est "p et $\overline{q}$"

6) P_6 : "$\left(0\notin\mathbb{N}^*\right)\Rightarrow(3$ *est pair*$)$"

P_6 : est fausse car $\left(0\notin\mathbb{N}^*\right)$ est vraie et $(3$ *est pair*$)$ est fausse

$\overline{P_6}$: "$\left(0\notin\mathbb{N}^*\right)$ et $(3$ *est impair*$)$"

7) P_7 : "$\left(0\notin\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow(3$ *est pair*$)$"

P_7 : est fausse car $\left(0 \notin \mathbb{N}^*\right)$ est vraie et $\left(3\ est\ pair\right)$ est fausse

$\overline{P_7}$: "$\left(0 \in \mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow \left(3\ est\ pair\right)$"

Car : non "$p \Leftrightarrow q$" est "$\overline{p} \Leftrightarrow q$"

8) P_8 : "$(0=1) \Leftrightarrow (-1 \geq 0)$"

P_8 : est vraie car $(0=1)$ est fausse et $(-1 \geq 0)$ est fausse aussi

$\overline{P_8}$: "$(0 \neq 1) \Leftrightarrow (-1 \geq 0)$"

Exercice2 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P : (\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

2) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 = x$

3) $P : (\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : x - y \succ 0$

4) $P : (\forall x \in [0;1]) : x^2 \geq x$

5) $P : (\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{a^2+b^2} = a+b$

6) $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2+y^2 \geq x+y$

7) $P : (\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2$

8) $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0$

9) $P : (\forall \varepsilon \succ 0); (\exists \alpha \succ 0) / |x-1| \prec \alpha \Rightarrow |2x-2| \prec \varepsilon$

10) $P : (\forall \varepsilon \geq 0); (\exists q \in \mathbb{Q}^*)\ tel\ que :\ 0 \leq q \leq \varepsilon$

11) $P : (\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 = 2$

Solution : $(\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$ 1) P :

$(\exists x = 4 \in \mathbb{Z}); \frac{4}{4} \in \mathbb{Z}$

Donc : P est vraie

Et on a : $\overline{P}$ $(\forall x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \notin \mathbb{Z}$

2) $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 = x$

$\overline{P}$ $(\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 \neq x$

$(\exists -1 \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 \neq -1$

$\overline{P}$ est vraie

Donc : P : est fausse

3) $P : (\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : x - y \succ 0$

$\overline{P}$ $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y - x \leq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$y - x \leq 0 \Leftrightarrow y \leq x$

$(\exists y = x-1 \in \mathbb{R}) : y - x \leq 0$

$\overline{P}$ est vraie

Donc : P : est fausse

4) $P : (\forall x \in [0;1]) : x^2 \geq x$

$\overline{P}:(\exists x\in[0;1]):x^2\prec x$

En posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

5) $P:(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

$\overline{P}:(\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$

En posant : $a=4$ et $b=3$ on aura : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

6) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\geq x+y$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\prec x+y$

En posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec 1+\frac{1}{2}$

c a d $\frac{5}{4}\prec\frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie

Donc : P est fausse

7) $P:(\forall x\in\mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x}\geq 2$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x}\prec 2$

En posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2\prec 2$

Donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

8) $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2\neq 0$

On a : $\Delta=x^2-4x^2=-3x^2$

si $\Delta\prec 0$ alors ; $y^2-xy+x^2\succ 0$ donc : $y^2-xy+x^2\neq 0$

En posant : $x=1$ on aura : $\Delta=-3\prec 0$

Donc : $(\exists x=1\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2\neq 0$

Donc La proposition $\overline{P}$: est vraie donc P est fausse

9) $P:(\forall\varepsilon\succ 0);(\exists\alpha\succ 0)/|x-1|\prec\alpha\Rightarrow|2x-2|\prec\varepsilon$

Soit $\varepsilon\succ 0$

$|2x-2|\prec\varepsilon\Rightarrow 2|x-1|\prec\varepsilon\Rightarrow|x-1|\prec\frac{\varepsilon}{2}$

$\left(\exists\alpha=\frac{\varepsilon}{2}\succ 0\right)/|x-1|\prec\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|2x-2|\prec\varepsilon$

On a P:est vraie

$\overline{P}:(\exists\varepsilon\succ 0);(\forall\alpha\succ 0)/|x-1|\prec\alpha\ \ et\ \ |2x-2|\geq\varepsilon$

10) $P:(\forall\varepsilon\geq 0);(\exists q\in\mathbb{Q}^*)\ tel\ que:\ 0\leq q\leq\varepsilon$

P:est vraie

$\overline{P}:(\exists\varepsilon\geq 0);(\forall q\in\mathbb{Q}^*):\ q\prec 0\ ou\ \varepsilon\prec q$

11) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$

$x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ \ ou\ \ x=-\sqrt{2}$

P:est fausse(pas d'unicité)

$\overline{P}$ $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\neq 2$ ou $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/\, x\neq y\ et\, x^2-2=y^2-2=0$

Exercice3 : Montrer que : $\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$

$x\neq y$ et $|x|<\frac{1}{4}$ et $|y-2|<\frac{1}{4}$ $\Rightarrow\frac{7}{5}<\frac{2y}{y-x}<3$

Solution : Supposons : $x\neq y$ et $|x|<\frac{1}{4}$et $|y-2|<\frac{1}{4}$

$|x|<\frac{1}{4}$ Signifie que : $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$ donc : $-\frac{1}{4}<-x<\frac{1}{4}(1)$

Et nous avons : $|y-2|<\frac{1}{4}$ Signifie $-\frac{1}{4}<y-2<\frac{1}{4}$

Signifie que : $-\frac{1}{4}+2<y-2+2<\frac{1}{4}+2$ c'est-à-dire : $\frac{7}{4}<y<\frac{9}{4}\,(2)$

En sommant (1)et (2)nous déduisons : $\frac{6}{4}<y-x<\frac{10}{4}$ cad $\frac{3}{2}<y-x<\frac{5}{2}$

Cette inégalité est équivalente à : $\frac{2}{5}<\frac{1}{y-x}<\frac{2}{3}\,(3)$

De (2) nous déduisons : $\frac{7}{2}<2y<\frac{9}{2}\,(4)$

(3)et (4)Donnent par multiplication : $\frac{7}{5}<\frac{2y}{y-x}<3$

Exercice4 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$ $x^2+y^2=x+y+2\Leftrightarrow x=y=1$

Solution : Montrons l'équivalence en raisonnant par double implication : Soit$(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\Leftarrow)$ Supposons : $x=y=1$et Montrons que : $x^2+y^2=x+y+2$

On a : $1^2+1^2=2\ \ et\ \ 1+1=2$ Donc : $x^2+y^2=x+y+2$

$\Rightarrow)$Supposons : $x^2+y^2=x+y+2$ et Montrons que : $x=y=1$

On a : $(x-1)^2+(y-1)^2=x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2+y^2-2(x+y)+2=2-2\times2+2=0$

Donc : $(x-1)^2+(y-1)^2=0$

Donc : $x-1=0\ \ et\ \ y-1=0$

Donc : $x=1\ \ et\ \ y=1$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x^2+y^2=x+y+2\Leftrightarrow x=y=1$

Exercice5 : Soient : $x\in\mathbb{R}^+\quad et\quad y\in\mathbb{R}^+$

1)Développer : $\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2$

2)Montrer que : $x+2y+13=6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow x=7\ et\ y=0$.

Solution : 1) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$:

$\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2=\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2\times3\sqrt{x+2}+9=x+2-2\times3\sqrt{x+2}+9=x+11-6\sqrt{x+2}$

2) Soient : $x\in\mathbb{R}^+\quad et\quad y\in\mathbb{R}^+$: On va raisonner par équivalence successives

$x+2y+13=6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow x+2y+13-6\sqrt{x+2}-2\sqrt{2y+1}=0$

$\Leftrightarrow x+11-6\sqrt{x+2}+2y-2\sqrt{2y+1}+2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2+2y+1-2\sqrt{2y+1}+1=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2+\sqrt{2y+1}^2-2\sqrt{2y+1}+1^2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2y+1}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-3=0\ \ et\ \ \sqrt{2y+1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=3\ \ et\ \ \sqrt{2y+1}=1\Leftrightarrow\sqrt{x+2}^2=9\ \ et\ \ \sqrt{2y+1}^2=1$

$\Leftrightarrow x+2=9 \ et \ 2y+1=1 \Leftrightarrow x=7 \ et \ y=0$

$x+2y+13=6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow x=7 \ et \ y=0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad et \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \ : \ x+2y+13=6\sqrt{x+2}+2\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow x=7 \ et \ y=0$

Exercice6 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x+2y-xy-2=2 \Rightarrow x=2$ ou $y=2$

On a : $2x+2y-xy-2=2 \Rightarrow 2x+2y-xy-4=0$

$\Rightarrow x(2-y)-2(2-y)=0 \Rightarrow (2-y)(x-2)=0$

$\Rightarrow 2-y=0$ ou $x-2=0 \Rightarrow y=2$ ou $x=2$

Donc : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2 \neq 2$

Exercice7 :1) Montrer que : $\forall (a;b) \in ([2;+\infty[)^2 \ : \ a \neq b \Rightarrow \sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$

2) Soient : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $a+b \neq 0$

Montrer que : $a \neq -2b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq 3$

Solution : 1) Soient $(a;b) \in ([2;+\infty[)^2$ Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\sqrt{1-\frac{4}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{b^2}} \Rightarrow a=b$

$\sqrt{1-\frac{4}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{b^2}} \Rightarrow \left(\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}\right)^2 = \left(\sqrt{1-\frac{4}{b^2}}\right)^2 \Rightarrow 1-\frac{4}{a^2} = 1-\frac{4}{b^2} \Rightarrow -\frac{4}{a^2} = -\frac{4}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} \Rightarrow a^2 = b^2$

$\Rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a=b$ Car $(a;b) \in ([2;+\infty[)^2$

Alors : Par contraposition : $\forall (a;b) \in ([2;+\infty[)^2 \ : \ a \neq b \Rightarrow \sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$

2) Soient : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $a+b \neq 0$

Utilisons un Raisonnement par contraposition et montrons que : $\frac{a-b}{a+b} = 3 \Rightarrow a=-2b$?

$\frac{a-b}{a+b} = 3 \Rightarrow a-b=3(a+b) \Rightarrow a-b=3a+3b \Rightarrow a-3a=3b+b \Rightarrow -2a=4b \Rightarrow a=-2b$

Alors : Par contraposition : $a \neq -2b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq 3$

Exercice8: Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution : Nous supposons que n n'est pas pair

Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair

Comme n n'est pas pair il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.

Alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+2k \in \mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair.

Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice9 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4} \leq 1$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2-x+1 \succ 0$

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^4+3x^2+1} \geq x^2+1$

4) Montrer que : $\forall(a;b)\in([0;+\infty[)^2$; $a+b\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$

5) Montrer que : $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$; $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}$

Solution : 1) Methode1 : Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x\in\mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1\Leftrightarrow 4x\leq x^2+4\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0\Leftrightarrow(x-2)^2\geq 0$

Donc : $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1\Leftrightarrow(x-2)^2\geq 0$

Et puisque on a : $(x-2)^2\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1$

Methode2 : Un raisonnement direct :

Soit : $x\in\mathbb{R}$ $1-\frac{4x}{x^2+4}=\frac{x^2+4-4x}{x^2+4}=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}\geq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1$

2) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x\in\mathbb{R}$ $x^2-x+1\succ 0\Leftrightarrow x^2-2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\succ 0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{4}{4}\succ 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\succ 0$

Et puisque on a : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\succ 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x^2-x+1\succ 0$

3) Soit : Nous raisonnons par équivalence

$x\in\mathbb{R}$ $\sqrt{x^4+3x^2+1}\geq x^2+1\Leftrightarrow x^4+3x^2+1\geq(x^2+1)^2$

$\Leftrightarrow x^4+3x^2+1\geq x^4+2x^2+1\Leftrightarrow x^2\geq 0$

Donc : $\sqrt{x^4+3x^2+1}\geq x^2+1\Leftrightarrow x^2\geq 0$

Et puisque on a : $x^2\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\sqrt{x^4+3x^2+1}\geq x^2+1$

4) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b)\in([0;+\infty[)^2$:On a : $a+b\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}\Leftrightarrow(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\geq 0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

Donc : $a+b\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

Et puisque on a : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$; $\forall(a;b)\in([0;+\infty[)^2$ (vraie)

Alors : $\forall(a;b)\in([0;+\infty[)^2$; $a+b\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$

5) Montrons que : $\forall(a;b)\in([0;+\infty[)^2$; $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}$

Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$:On a : $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2}{a+b}-\frac{3a-b}{4}\geq 0\Leftrightarrow\frac{4a^2-3a^2-3ab+ab+b^2}{4(a+b)}\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-2ab+b^2}{4(a+b)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0$$

Donc : $\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0$

Et puisque on a : $\frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0$; est une proposition vraie $\forall (a;b) \in (]0;+\infty[)^2$

Alors : $\forall (a;b) \in (]0;+\infty[)^2$; $\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$

Exercice10: 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1): $|2x^2-x-6|-|x+1|-1=0 \quad (1)$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (2): $\sqrt{3x+4}=x$

Solution : 1) On résout d'abord les Equations :

$x^2-x-6=0$ et $x+1=0$

Les solutions de l'équation : $2x^2-x-6=0$ dans $\mathbb{R}$ sont : 2 et $\frac{-3}{2}$.

l'équation $x+1=0$ admet unique solution : -1

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$		-1		2		$+\infty$
$2x^2-x-6$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

On va Opérer par disjonction de cas :

<u>Premier cas :</u> si $x \in \left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ alors $|2x^2-x-6|=2x^2-x-6$ et $|x+1|=-x-1$

Donc l'équation (1) devient : $(1) \Leftrightarrow 2x^2-x-6+x+1-1=0$

$(1) \Leftrightarrow 2x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}\ ou\ x=\sqrt{3}$

et comme : $\sqrt{3} \notin \left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ et $-\sqrt{3} \in \left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

Donc $S_1=\{-\sqrt{3}\}$

<u>Deuxième cas :</u> si $x \in \left[-\frac{3}{2};-1\right]$ alors $|2x^2-x-6|=-(2x^2-x-6)$ et $|x+1|=-x-1$

Donc l'équation (1) devient : $(1) \Leftrightarrow -2x^2+x+6+x+1-1=0$

$(1) \Leftrightarrow -2x^2+2x+6=0$

$\Delta=4+24=28 \succ 0$

L'équation admet deux solutions distinctes :

$x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $x'=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ et comme : $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \notin \left[-\frac{3}{2};-1\right]$ Donc : $S_2=\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$

<u>3ième cas :</u> si $x \in [-1;2]$

Alors $|2x^2-x-6|=-(2x^2-x-6)$ et $|x+1|=x+1$

Donc l'équation (1) devient : $(1) \Leftrightarrow -2x^2+x+6-x-1-1=0$

$(1) \Leftrightarrow 4-2x^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2} \notin [-1;2]$

Donc : $S_3=\{\sqrt{2}\}$

4ième cas : si $x\in[2;+\infty[$

Alors $|2x^2-x-6|=2x^2-x-6$ et $|x+1|=x+1$

Donc l'équation (1) devient : $(1)\Leftrightarrow 2x^2-x-6-x-1-1=0$

$(1)\Leftrightarrow 2x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow x^2-x-4=0$

$\Delta=17\succ 0$; L'équation admet deux solutions distinctes : $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ et $x'=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

et comme : $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}\notin[2;+\infty[$ Donc : $S_4=\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'Equation (1) est :

$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\left\{-\sqrt{3};\frac{1-\sqrt{13}}{2};\sqrt{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

2) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation (2): $\sqrt{3x+4}=x$

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (2)

$D_2=\{x\in\mathbb{R}/3x+4\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -\frac{4}{3}\right\}=\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$

Soit $x\in\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$

$\sqrt{3x+4}=x\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=x^2 \;\; et \;\; x\geq 0$

$\Leftrightarrow 3x+4=x^2 \;\; et \;\; x\geq 0$

$\Leftrightarrow -x^2+3x+4=0 \;\; et \;\; x\geq 0$

et comme : $\Delta=9-4\times(-1)\times 4=25\succ 0$

L'équation admet deux solutions distinctes : $x=\frac{-3+\sqrt{25}}{-2}=-1$ et $x'=\frac{-3-\sqrt{25}}{-2}=4$ et comme :

$-1\prec 0 \;\; et \;\; 4\succ 0$ Donc l'ensemble des solutions de L'équation (2) est : $S=\{4\}$

Exercice11 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_1): $\sqrt{x^2+1}\succ 2x$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation : (I_1): $\sqrt{x^2+1}\succ 2x$

$D=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\geq 0\}=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et S l'ensemble des solutions de (I_1) :

$x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\succ 2x$

1ieme cas : si $2x\leq 0\Leftrightarrow x\leq 0$ c'est-à-dire : $x\in]-\infty;0]$

Alors : $S_1=]-\infty;0]$ car l'inéquation est toujours vérifier ($\sqrt{x^2+1}\geq 0$ et $2x\leq 0$)

2ieme cas : si $x\in]0;+\infty[$ alors $2x\succ 0$

$\sqrt{x^2+1}\succ 2x\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\succ(2x)^2\Leftrightarrow x^2+1\succ 4x^2\Leftrightarrow 1-3x^2\succ 0\Leftrightarrow x\in\left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

Donc : $S_2 = \left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty;0] \cup \left]0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[= \left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

Exercice12 : Montrer par l'absurde que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : \sqrt{1+x^2} \neq x+1$

Solution : Par l'absurde, supposons que : $\exists x \in \mathbb{R}^{*+} : \sqrt{1+x^2} = x+1$

$\sqrt{1+x^2} = x+1 \Rightarrow 1+x^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 1+x^2 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$!

C'est une contradiction car on sait que : $x \in \mathbb{R}^{*+}$

Ceci signifie : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : \sqrt{1+x^2} \neq x+1$

Exercice13 : 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{n^2+4}{n^2+5} \notin \mathbb{N}$

2)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2+14} \notin \mathbb{N}$

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Méthode1 : Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{n^2+4}{n^2+5} \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{n^2+4}{n^2+5} = m$

$\Rightarrow n^2+4 = m(n^2+5) \Rightarrow n^2+5 / n^2+4$

et comme : $n^2+5 \succ n^2+4$

C'est une contradiction car si n^2+5 / n^2+4

Alors : $n^2+5 \leq n^2+4 \Rightarrow 5 \leq 4$

Ceci signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{n+2}{n+3} \notin \mathbb{N}$

Méthode2 : direct : On a : $n \in \mathbb{N}$ donc $n^2+4 \prec n^2+5$

Donc $0 \prec \frac{n^2+4}{n^2+5} \prec 1$

Donc : $\frac{n^2+4}{n^2+5} \notin \mathbb{N}$ car un nombre strictement compris entre deux entiers consécutifs :0 et 1 ne peut pas être entier

2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+14} \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n^2+14} = m$

$\sqrt{n^2+14} = m \Rightarrow n^2+14 = m^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 14 = 2\times 7 \Rightarrow (m-n)(m+n) = 2\times 7$

$\Rightarrow m-n$ *et* $m+n$ des diviseurs de 14 et $D_{14} = \{1;2;7;14\}$ avec : $(m-n)+(m+n) = 2m$ paire

Impossible de trouver : m *et* n

C'est une contradiction

Ceci signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n^2+14} \notin \mathbb{N}$

Exerjcice14 : Montrer que le système suivant n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$: (S) : $\begin{cases} 5x-4z \succ 1 \\ 4y-5x \geq 3 \\ y-z \leq 1 \end{cases}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : le système (S) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^2$:

Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases}5x-4z\succ 1\\4y-5x\geq 3\\y-z\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x-4z\succ 1 & (1)\\4y-5x\geq 3 & (2)\\y-z\leq 1\end{cases}\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}\begin{cases}4y-4z\succ 4\\y-z\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-z\succ 1\\y-z\leq 1\end{cases}$

Ce qui est contradictoire

Donc : le système (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$

Exercice15 : Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N};\quad 1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$.

Solution : Notons P(n) La proposition suivante : $"1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1"$.

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $2^0=1$ et $2^{0+1}-1=2-1=1$ donc $1=1$.

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}$: Montrons alors que : $1+2+2^2+2^3...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$??

On a : $1+2+2^2+2^3...+2^n+2^{n+1}=\left(1+2+2^2+2^3...+2^n\right)+2^{n+1}$

D'après l'hypothèse de récurrence On a : $1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$

Donc : $1+2+2^2+2^3...+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\times 2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire :

$\forall n\in\mathbb{N};\quad 1+2+2^2+2^3...+2^n=2^{n+1}-1$.

Exercice16 : Montrer que : 1) $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$

2) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

4) $\forall n\geq 5:\ 2^n\geq 6n$

5) $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

6) $\forall n\in\mathbb{N}$; 7^n-1 est divisible par 6

Solution : 1) Notons P(n) La proposition « $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$ »

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1^3=\frac{1^2\times(1+1)^2}{4}=1$

Donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\frac{(n+1)^2\times(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

et on a : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$.

2) Notons P(n) La proposition " $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1(1+1) = 2$ et $\frac{1}{3}\times 1(1+1)(1+2) = \frac{1}{3}\times 2\times 3 = 2$.

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$??

On a : $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2) = [1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1)] + (n+1)(n+2)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

Donc $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.

3)Notons P(n) La proposition « $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = 1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$ »

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2 = 4$ donc $4=4$.

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = (n+1)^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{k=n+1} (2k+1) = 1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3) = (n+2)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{k=n+1} (2k+1) = \sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) + (2n+3)$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = (n+1)^2$

Donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=(n+1)^2+(2n+3)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$

Donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=(n+2)^2$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

4)Notons P(n) La proposition : « $n\geq 5\ ;2^n\geq 6n$ »
1étapes : Initialisation : Pour $n=5:2^5=32$ et $6\times 5=30$ donc $2^5\geq 6\times 5$
Donc P (5) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\geq 6n$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $2^{n+1}\geq 6(n+1)$??
Or, puisque $2^n\geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
Donc : $2^n\times 2\geq 6n\times 2$ donc $2^{n+1}\geq 12n$ **(1)**
Or on remarque que : $12n\geq 6(n+1)$ **(2)**
En effet : $12n-6(n+1)=6n-6\geq 0$
Car : $n\geq 5$donc $6n\geq 30$ c'est-à-dire : $6n-6\geq 24\geq 0$
On conclut par récurrence que : Pour tout $n\geq 5$: $2^n\geq 6n$
5) Notons P(n) La proposition « $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$ »
L'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^3+2\times 0=0$ est un multiple de3
Donc P (0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2==(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ Avec $k'=k+n^2+n+1$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; n^3+2n est divisible par 3

6) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6
1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $7^0-1=0$ est un multiple de 6
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/7^n-1=6k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/7^{n+1}-1=6k'$??
$7^{n+1}-1=7\times 7^n-1=7^n\times(6+1)-1=6\times 7^n+7^n-1=6\times 7^n+6k=6(7^n+k)=6k'$ avec $k'=7^n+k$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; 7^n-1 est divisible par 6

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien