1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°19 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la négation des propositions suivantes :

$P:(\forall x\in\mathbb{N});x\neq 1\Rightarrow x\succ 1$

$Q:\ ((\forall x\in\mathbb{R})(\exists\alpha\succ 0):|x|\prec\alpha\Rightarrow\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|\prec\alpha$

$R:(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall m\in\mathbb{N}^*);\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+m}\in\mathbb{N}$

$S:(\forall a\in\mathbb{R}^+)(\forall b\in\mathbb{R}^+);\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$T:(\forall x\in]0;+\infty[)(\forall y\in]0;+\infty[):\sqrt{xy}=\frac{2xy}{x+y}$

$U:(\forall x\in]0;1[)(\forall y\in]0;1[):\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\prec 1-xy$

$V:(\forall x\in]0;1[):\frac{2x}{x^2(1-x^2)}\prec 1$

Solution : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{N});x\neq 1\ et\ x\leq 1$

$\overline{Q}:\ ((\exists x\in\mathbb{R})(\forall\alpha\succ 0):|x|\prec\alpha\ et\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|\geq\alpha$

$\overline{R}:(\exists n\in\mathbb{N}^*)(\exists m\in\mathbb{N}^*);\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+m}\notin\mathbb{N}$

$\overline{S}:(\exists a\in\mathbb{R}^+)(\exists b\in\mathbb{R}^+);\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\overline{T}:(\exists x\in]0;+\infty[)(\exists y\in]0;+\infty[):\sqrt{xy}\neq\frac{2xy}{x+y}$

$\overline{U}:(\exists x\in]0;1[)(\exists y\in]0;1[):\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1-xy$

$\overline{V}:(\exists x\in]0;1[):\frac{2x}{x^2(1-x^2)}\geq 1$

Exercice2 : Ecrire la négation et donner les valeurs de vérités des propositions suivantes :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

Solution :1) $P:(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R}):x\neq 2\ et\ \ x^2=4$

$\overline{P}$: est une proposition vraie car : $(\exists x=-2\in\mathbb{R}):-2\neq 2\ et\ \ (-2)^2=4$

Par suite : $P:(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$ est fausse

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

Q : est une proposition vraie car : $(\exists x=-1000\in\mathbb{R}):-1000<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

$\overline{Q};(\forall x\in\mathbb{R}):x<2\ et\ x^2\prec 2019$ est fausse

Exercice3 : Cocher la ou les bonne(s)

□ « Il existe $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est une proposition vraie

□ « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est une proposition vraie

□ « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est une proposition vraie

□ « Il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est une proposition vraie

□ « Pour tout $x \in \mathbb{R}$il existe $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est équivalent à « Il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$»

Solution :

☒ « Il existe $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est une proposition vraie

□ « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est une proposition vraie

☒ « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est une proposition vraie

□ « Il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est une proposition vraie

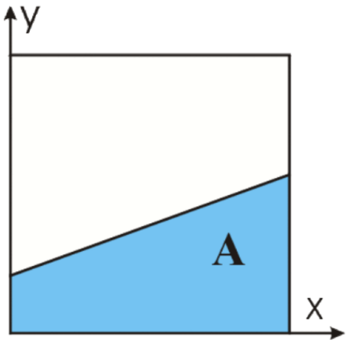
□ « Pour tout $x \in \mathbb{R}$il existe $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$» est équivalent à « Il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \prec y$»

Exercice4 : Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :
1)Le carré de tout réel est positif.
2)Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré

Solution :1) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$

2) $\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ x \geq x^2$

Exercice5 : Pour chacune des propositions, en correspondance avec l'ensemble A (en bleu) suggéré par le dessin ci-dessous, indiquez votre opinion concernant le fait que les propriétés sont vérifiées ou non.



Quelles sont les assertions vraies ?

f "$\forall x\ ;\exists y\ \ (x;y)\in A$ "

f "$\forall y\ \ ;\exists x\ \ (x;y)\in A$ "

f " $\exists y\ \ ;\forall x\ (x;y)\in A$ "

f "$\exists x\ ;\forall y\ \ (x;y)\in A$ "

Solution :

☒ "$\forall x\ ;\exists y\ \ (x;y)\in A$ " chaque verticale contient un point dans A

f "$\forall y\ \ ;\exists x\ \ (x;y)\in A$ "   certaines horizontales ne contiennent pas de point de A

☒" $\exists y\ \ ;\forall x\ (x;y)\in A$ "

f "$\exists x\ ;\forall y\ \ (x;y)\in A$ "

Exercice6 : Écrire sous forme conjonctive ou sous forme disjonctive les propositions ci-dessous :

1) "$\left(\overline{P}\ \ et\ Q\right) \Rightarrow R$ "

2) "$\left(\overline{P\ \ ou\ \ \overline{Q}}\ \right) et \left(R \Rightarrow S\right)$"

Solution : La méthode est de remplacer les symboles $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$ par leur équivalent et d'utiliser les lois de Morgan : $\left(\overline{P \ ou \ Q}\right) \equiv \left(\overline{P} \ et \ \overline{Q}\right)$; $\left(\overline{P \ et \ Q}\right) \equiv \left(\overline{P} \ ou \ \overline{Q}\right)$

1) " $\left(\overline{P} \ et \ Q\right) \Rightarrow R$ " est la même chose que : " $\left(\overline{\overline{P} \ et \ Q}\right) ou \ R$ "

On enlève le non externe, et on trouve : " $\left(P \ ou \ \overline{Q}\right) ou \ R$ "

C'est une forme disjonctive.

2) " $\left(\overline{P \ ou \ \overline{Q}}\right) et \left(R \Rightarrow S\right)$"

On enlève le $\Rightarrow$ et on trouve donc : " $\left(\overline{P \ ou \ \overline{Q}}\right) et \left(\overline{R} \ ou \, S\right)$"

On enlève ensuite le non et on trouve : " $\left(\overline{P} \ et \ Q\right) et \left(\overline{R} \ ou \, S\right)$"

Exercice7 : Donner la valeur de vérité

De la proposition suivante : F "$\exists! x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 1 = 3$"

Solution : F "$\exists! x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 1 = 3$"

Se lit « il existe un unique $x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 1 = 3$" »

$2x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \ ou \ x = -\sqrt{2}$ (il donc 2 solutions)

Donc : La proposition : F "$\exists! x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 1 = 3$" est fausse

Exercice8 : Montrer que La proposition $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq x + y$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \prec x + y$

En posant : $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}$ on aura : $1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec 1 + \frac{1}{2}$ c a d $\frac{5}{4} \prec \frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie Donc P est fausse.

Exercice9 : Montrer que La proposition $P : \left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right) : \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P} : \left(\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2\right) : \sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

En posant : $a = 4$ et $b = 3$ on aura : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ et $a + b = 4 + 3 = 7$

Donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice10 : Démontrer en utilisant le Raisonnement par implications successives que :

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(xy^2 - x^2 y = y - x \Rightarrow x = y \ \ ou \ \ xy = 1\right)$

Solution : Soit : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$;

Supposons que : $xy^2 - x^2 y = y - x$ et montrons que : $x = y \ \ ou \ \ xy = 1$

$$xy^2 - x^2 y = y - x \Rightarrow xy(y - x) = y - x \Rightarrow xy(y - x) - (y - x) = 0 \Rightarrow (y - x)(xy - 1) = 0$$
$$\Rightarrow y - x = 0 \ ou \, xy - 1 = 0 \Rightarrow y = x \ ou \, xy = 1$$

Donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(xy^2 - x^2 y = y - x \Rightarrow x = y \ \ ou \ \ xy = 1\right)$

Exercice11 : Démontrer en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} ; \left(x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1\right)$

Solution : Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

S : « $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} ; \left(x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1\right)$

Soit : $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; Par contraposée Montrons que : $\left(\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \right)$

$\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow 3x = x+1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Par contraposée on a donc : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}; \left(x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1 \right)$

Exercice12 : Démontrer en utilisant la contraposée que : $\forall x \in \mathbb{R}; \left(x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0 \right)$

Solution : Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie : $\forall x \in \mathbb{R}; \left(x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0 \right)$

Soit : $x \in \mathbb{R}$; Par contraposée Montrons que : $\left(x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \right)$

Supposons que : $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ Alors : $x^2(x+2) + (x+2) = 0$

Alors : $(x+2)(x^2+1) = 0$

Alors : $x+2=0$ ou $x^2+1=0$

Alors : $x=-2$ ou $x^2=-1$ (impossible)

Alors : $x=-2$

Donc : $\left(x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \right)$

Par contraposée on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}; \left(x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0 \right)$

Exercice13 : Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; 10^n - 1$ est divisible par 9

Solution : Montrons $\exists k \in \mathbb{N} / 10^n - 1 = 9k$

1étapes : Pour n=0 nous avons $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ est un multiple de9

Donc P (0) est vraie.

2étapes : supposons que : $\exists k \in \mathbb{N} / 10^n - 1 = 9k$

3étapes : Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 10^{n+1} - 1 = 9k'$??

$10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1 = 10^n \times (9+1) - 1 = 10^n \times 9 + 10^n - 1 = 10^n \times 9 + 9k$

$10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1 = 10^n \times (9+1) - 1 = 10^n \times 9 + 10^n - 1 = 10^n \times 9 + 9k$ Avec $k' = k + n^2 + n + 1$

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 10^n - 1$ est divisible par 9

Exercice14 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2 = 4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : Supposons que : $1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$

3étapes : Montrons alors que : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3) = (n+2)^2$??

On a : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3) = (1+3+5+...+(2n+1)) + (2n+3)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$

Donc : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3) = (n+1)^2 + (2n+3)$

$1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3) = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4$

Donc : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice15 : Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 \prec b \prec a$.

Montrer que : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$

Solution : Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 \prec b \prec a$.

Par l'absurde, supposons que : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = n$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = n \Leftrightarrow a^2+b^2 = na^2-nb^2 \Leftrightarrow nb^2+b^2 = na^2-a^2 \Leftrightarrow b^2(n+1)=a^2(n-1) \Leftrightarrow n+1=\frac{a^2}{b^2}(n-1)$$

$\Rightarrow (n+1)(n-1)=\frac{a^2}{b^2}(n-1)^2 \Rightarrow n^2-1=\left(\frac{a}{b}(n-1)\right)^2$ Posons : $\frac{a}{b}(n-1)=m \Rightarrow n^2=m^2+1$

- Si : $m \notin \mathbb{N}$ et puisque $m \in \mathbb{Q}$ alors $m^2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{n^2-1 \notin \mathbb{N}}$ or $n \in \mathbb{N}$ et donc $\boxed{n^2-1 \in \mathbb{N}}$ contradiction
- Si : $m \in \mathbb{N}$: On a : $n^2-m^2=1 \Rightarrow (n-m)(n+m)=1$ avec : $n+m \in \mathbb{N}$ et $n-m \in \mathbb{N}$

Remarque : $(n-m)(n+m)=1$ et $n+m \in \mathbb{N} \Rightarrow n-m \geq 0$ et puisque $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$

Alors : $n-m \in \mathbb{N}$

Donc : $n+m \in \mathbb{N}$ et $n-m \in \mathbb{N}$ et $(n-m)(n+m)=1$

Donc : $\begin{cases} n+m=1 \\ n-m=1 \end{cases} \Rightarrow n+m+n-m=3 \Rightarrow 2n=2 \Rightarrow \boxed{n=1 \Rightarrow p=1}$ et puisque : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=n$

Alors : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=1 \Rightarrow a^2+b^2=a^2-b^2 \Rightarrow 2b^2=0 \Rightarrow b^2=0 \Rightarrow b=0$ contradiction avec : $0 \prec b \prec a$

Donc : contradiction dans les deux cas : $m \in \mathbb{N}$ et $m \notin \mathbb{N}$ par suite : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$

Exercice16: On considère la proposition suivante : P_n "$\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$: $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$ "

1)Montrer que : $P_n \Leftrightarrow$."$\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$; $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$ "

2) Comparer : $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ et $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$

3)a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$: $(1+x)^n > 1+nx$

b) Déduire que : la proposition P_n est vraie

Solution : 1) par des équivalences successives

Montrons que : $P_n \Leftrightarrow$."$\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$; $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$ "

Soit $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$: $P_n \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)<1 \Leftrightarrow \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$

On a : $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\Leftrightarrow n\geq 2\Leftrightarrow n^2\geq 4\Rightarrow n^2\succ 1\Rightarrow n^2-1\succ 0\Rightarrow \dfrac{n^2-1}{n^2}\succ 0$

$$P_n\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{n^2-1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\right)^n$$

$\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n$ Par suite : $P_n\Leftrightarrow."\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\dfrac{1}{n}"$

2) Comparons : $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ et $\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

On a : $n\geq 2\Leftrightarrow n^2\geq 4\Rightarrow n^2\succ 1\Rightarrow n^2-1\succ 0$

On a aussi : $n^2\succ n^2-1\Rightarrow\dfrac{1}{n^2}\prec\dfrac{1}{n^2-1}\Rightarrow 1+\dfrac{1}{n^2}\prec 1+\dfrac{1}{n^2-1}\Rightarrow\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n\prec\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$; $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n\prec\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n$

3)a) Montrer par récurrence que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $(1+x)^n>1+nx$

Notons H(n) La proposition suivante : « $(1+x)^n>1+nx$ »

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$;Nous allons démontrer par récurrence que H(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=2 nous avons :

$(1+x)^2=x^2+(2x+1)$ et $x^2\succ 0$ car $x\in\mathbb{R}_+^*$

Donc : $(1+x)^2>1+2x$.

Donc/ H(2) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence : Soient : $x\in\mathbb{R}_+^*$; $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$:

Supposons que H(n) soit vraie c'est-à-dire : $(1+x)^n>1+nx$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $(1+x)^{n+1}>1+(n+1)x$??

On a : $(1+x)^n\geq 1+nx$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $(1+x)^n(1+x)\geq(1+nx)(1+x)$

Donc : $(1+x)^{n+1}\geq 1+x+nx+nx^2$

Donc : $(1+x)^{n+1}\geq(1+(1+n)x)+nx^2$

Donc : $(1+x)^{n+1}\geq(1+(1+n)x)$ car

$(1+(1+n)x)+nx^2\geq 1+(1+n)x$ (On pourra faire la différence)

Donc H(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence H(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, c'est-à-dire :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*;\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $(1+x)^n>1+nx$

b) Déduisons que : la proposition P_n est vraie

On a : $P_n\Leftrightarrow."\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\dfrac{1}{n}"$ et d'après 2) on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$; $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n\prec\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n$

Si je montre que : $1+\frac{1}{n}\prec\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ on peut déduire le résultat.

D'après 3) a) on a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $(1+x)^n>1+nx$

On prend : $x=\frac{1}{n^2}\succ 0$ alors : $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n>1+n\frac{1}{n^2}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n>1+\frac{1}{n}$: $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Donc : on aura : $1+\frac{1}{n}\prec\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ et $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\prec\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n$

Par suite : "$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{1}{n}$ " est vrais

Et comme : $P_n\Leftrightarrow$."$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{1}{n}$ " alors aussi la proposition P_n est vraie.

Exercice17 : 1) Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{R})(\forall b\in\mathbb{R}):a\in\mathbb{Q}\ et\ b\notin\mathbb{Q}\Rightarrow a+b\notin\mathbb{Q}$

2) Déterminera la négation de la proposions $P:(\forall a\in\mathbb{R})(\forall b\in\mathbb{R}):a\notin\mathbb{Q}\ et\ b\notin\mathbb{Q}\Rightarrow a+b\notin\mathbb{Q}$ et étudier la valeur de vérité de la proposition : P

3) Soit : $k\in\{3;5;7;11;13;15\}$; Supposons que : $\sqrt{k}\in\mathbb{Q}$

a) Montrer qu'il existe $(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$: tel que : $a\wedge b=1$ et $\frac{k-1}{8}=\frac{a^2-1}{8}-\frac{b^2-1}{8}k$

b) Montrer que : $\frac{a^2-1}{8}\in\mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8}\in\mathbb{N}$

c)Trouver une contradiction et conclure

4) Montrer que : $P:(\forall a\in\mathbb{Q}^+)(\forall b\in\mathbb{Q}^+):\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}^+\Rightarrow\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\ et\ \sqrt{b}\in\mathbb{Q}$

Solution : ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

1) Montrons que : $(\forall a\in\mathbb{R})(\forall b\in\mathbb{R}):a\in\mathbb{Q}\ et\ b\notin\mathbb{Q}\Rightarrow a+b\notin\mathbb{Q}$

Soient : $(a\in\mathbb{R})\ et\ (b\in\mathbb{R})$: Supposons que : $a\in\mathbb{Q}\ et\ b\notin\mathbb{Q}$ et montrons que $a+b\notin\mathbb{Q}$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $a+b\in\mathbb{Q}$

Donc : $a+b\in\mathbb{Q}$ et $-a\in\mathbb{Q}$

Alors : $a+b-a\in\mathbb{Q}$ c'est-à-dire : $b\in\mathbb{Q}$; Nous obtenons donc une contradiction car $b\notin\mathbb{Q}$

Par suite : $a+b\notin\mathbb{Q}$

2) $P:(\forall a\in\mathbb{R})(\forall b\in\mathbb{R}):a\notin\mathbb{Q}\ et\ b\notin\mathbb{Q}\Rightarrow a+b\notin\mathbb{Q}$

$\overline{P}:(\exists a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R}):a\notin\mathbb{Q}\ et\ b\notin\mathbb{Q}\quad et\quad a+b\in\mathbb{Q}$

$(\exists a=\sqrt{2}\in\mathbb{R})(\exists b=1-\sqrt{2}\in\mathbb{R}):\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\ et-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\quad et\quad\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in\mathbb{Q}$

Donc ; La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

3) Soit : $k\in\{3;5;7;11;13;15\}$; Supposons que : $\sqrt{k}\in\mathbb{Q}$

a) Montrons qu'il existe : $(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que : $a\wedge b=1$ et $\frac{k-1}{8}=\frac{a^2-1}{8}-\frac{b^2-1}{8}k$

$\sqrt{k}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/\sqrt{k}=\frac{a}{b}$ avec : $a\wedge b=1$

$\Rightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/k=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow kb^2=a^2\Rightarrow 0=a^2-kb^2\Rightarrow k-1=a^2-kb^2+k-1$

$\Rightarrow k-1 = a^2 - 1 - \left(b^2-1\right)k \Rightarrow \frac{k-1}{8} = \frac{a^2-1}{8} - \frac{b^2-1}{8}k$

b) Pour montrer que : $\frac{a^2-1}{8} \in \mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8} \in \mathbb{N}$: Il suffit de montrer que : b est impair

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que b est pair

Donc : b^2 est pair $\Rightarrow kb^2$ est pair$\Rightarrow$ a^2 est pair (car :)$\Rightarrow$ a est pair

Nous obtenons donc une contradiction car : $a \wedge b = 1$

Par suite : b est impair$\Rightarrow$ b^2 est impair et $kb^2 = a^2$ et $k \in \{3;5;7;11;13;15\}$ est impair

$\Rightarrow$ a^2 est impair$\Rightarrow$ a est impair

a est impair et b est impair$\Rightarrow$ $\exists\left(k;k''\right) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, a = 2k+1 \; et \; b = 2k'+1$

Donc : $a^2 = \left(2k+1\right)^2 = 4k^2+4k+1$ et $b^2 = \left(2k'+1\right)^2 = 4k'^2+4k'+1$

Donc : $a^2-1 = 4k\left(k+1\right)$ et $a^2-1 = 4k'\left(k'+1\right)$

Donc : $\frac{a^2-1}{8} = \frac{4k\left(k+1\right)}{8} = \frac{k\left(k+1\right)}{2}$ et $\frac{b^2-1}{8} = \frac{4k'\left(k'+1\right)}{8} = \frac{k'\left(k'+1\right)}{2}$ or : $k\left(k+1\right) = 2n$ (le produit de deux nombres consécutifs) . D'où : $\frac{a^2-1}{8} \in \mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8} \in \mathbb{N}$

c)Trouvons une contradiction et concluons :

On a : $\frac{a^2-1}{8} \in \mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8} \in \mathbb{N}$ donc : $\frac{a^2-1}{8} \in \mathbb{N}$ et $\frac{b^2-1}{8}k \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{k-1}{8} = \frac{a^2-1}{8} - \frac{b^2-1}{8}k \in \mathbb{Z}$ et comme : $\frac{k-1}{8} \geq 0$ car $k \in \{3;5;7;11;13;15\} \geq 1$

Donc : $\frac{k-1}{8} \in \mathbb{N}$ <u>absurde</u> car : $k-1 \in \{2;4;6;10;12;14\} \Rightarrow \frac{k-1}{8} \in \left\{\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\}$ Donc : $\frac{k-1}{8} \notin \mathbb{N}$

<u>Conclusion</u> : $\forall k \in \{3;5;7;11;13;15\}$; $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$

4) Montrons que : $P:\left(\forall a \in \mathbb{Q}^+\right)\left(\forall b \in \mathbb{Q}^+\right): \sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q} \; et \; \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

Soient : $\left(a \in \mathbb{Q}^+\right) \; et \; \left(b \in \mathbb{Q}^+\right)$: Supposons que : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}^+$

Si $a \neq b$ alors : $\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}^+$

Alors : $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}^+$ donc : $\frac{1}{a-b}\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{1}{a-b} \in \mathbb{Q}$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ et comme $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow 2\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{2}2\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ et comme $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ alors : $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$

Donc : $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

Si $a \neq b$ alors : $2\sqrt{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{1}{2}2\sqrt{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien