# 1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
# 1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
## Correction Série N°18 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

**Exercice1 :** Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes

1) $P$ "$\left(2\geq 1 \quad et \quad -1\in\mathbb{N}\ \right)$"

2) $Q$ "$\left(\sqrt{3}\geq 2 \ ou \ \sqrt{2}\notin\mathbb{N}\ \right)$"

3) $R$ "$\forall x\in\mathbb{R}/2x\geq 0$"

4) $M$ "$\exists x\in\mathbb{R}/2x-1=3$"

5) $N$ "$\forall n\in\mathbb{N}/\dfrac{n+1}{2}\in\mathbb{N}$"

7) $K$ "$\exists x\in\mathbb{R}/x^2-x+3=0$"

**Solution :**1) La proposition : $P$ "$\left(2\geq 1 \quad et \quad -1\in\mathbb{N}\ \right)$" est fausse

Car "$2\geq 1$ " est vraie et "$-1\in\mathbb{N}$" est fausse

La négation de « $P$ "$\left(2\geq 1\, et\, -1\in\mathbb{N}\ \right)$" » est $\overline{P}$ "$\left(2\prec 1 ou -1\notin\mathbb{N}\ \right)$"

2)La proposition : $Q$ "$\left(\sqrt{3}\geq 2 \ ou \ \sqrt{2}\notin\mathbb{N}\ \right)$" est vraie

Car "$\sqrt{3}\geq 2$ "est fausse et "$\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$" est vraie

La négation de «$Q$ "$\left(\sqrt{3}\geq 2 \quad ou \quad \sqrt{2}\notin\mathbb{N}\ \right)$" » est $\overline{Q}$ "$\sqrt{3}\prec 2 \quad et \quad \sqrt{2}\in\mathbb{N}$"

3)La proposition : $R$ "$\forall x\in\mathbb{R}/2x\geq 0$" est fausse

Car pour x=-1 : elle est fausse

La négation de « $R$ "$\forall x\in\mathbb{R}/2x\geq 0$" » est $\overline{R}$ "$\exists x\in\mathbb{R}/2x\prec 0$"

4)La proposition : $M$ "$\exists x\in\mathbb{R}/2x-1=3$" est vraie

Car pour x=2 : elle est vraie

La négation de « $M$ "$\exists x\in\mathbb{R}/2x-1=3$" » est $\overline{M}$ "$\forall x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 3$"

5)La proposition : $N$ "$\forall n\in\mathbb{N}/\dfrac{n+1}{2}\in\mathbb{N}$" est fausse

Car pour n=2 : elle est fausse

La négation de « $N$ "$\forall n\in\mathbb{N}/\dfrac{n+1}{2}\in\mathbb{N}$" » est $\overline{N}$ "$\exists n\in\mathbb{N}/\dfrac{n+1}{2}\notin\mathbb{N}$"

**Exercice2 :** Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les symboles logiques et donner la valeur de vérité et la négation :

1) $P$: « l'équation $x^2-2x-5=0$ admet une solution dans l'ensemble des entiers naturels »

2) $Q$: « l'inéquation $x^2-3x-11\leq 0$ n'admet pas de solution dans l'ensemble des nombres réels »

3) $R$: « Tout entier naturel multiple de 12 est divisible par 3 »

**Solution :1** ) $P$: « $\exists x\in\mathbb{N}; x^2-2x-5=0$ »

$x^2-2x-5=0$ : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 + 4 \times 1 \times 5 = 24$.

Comme : $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{2-2\sqrt{6}}{2}=1-\sqrt{6}\notin\mathbb{N}$ et $x_2=\dfrac{2+2\sqrt{6}}{2}=1+\sqrt{6}\notin\mathbb{N}$

Par suite : $P$ est une proposition fausse.

$P$: « $\forall x \in \mathbb{N}; x^2 - 2x - 5 \neq 0$ »

2) $x^2 - 3x - 11$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 + 4 \times 1 \times 11 = 9+44=53 > 0$.

Comme : $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes

L'inéquation $x^2 - 3x - 11 \leq 0$ admet au moins ses racines comme solutions

est une proposition fausse.

$Q$: $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x - 11 \succ 0$

$\overline{Q}$: $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x - 11 \leq 0$

3) $R$: $\forall n \in \mathbb{N}$ « $n$ est multiple de 12 $\Rightarrow$ $n$ est divisible par 3 » est une proposition vraie.

$\overline{R}$: $\exists n \in \mathbb{N}$ « $n$ est multiple de 12 *et* $n$ n'est pas divisible par 3 »

**Exercice3 :** 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E)$: $2x^2 + x - 1 = 0$

2) Déduire la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P$ : " $\exists x \in \mathbb{R} / 2x^2 + x - 1 = 0$" ; $Q$ " $\exists n \in \mathbb{N} / 2n^2 + n - 1 = 0$"

3) Donner la négation de la proposition $P$

**Solution :**1) $(E)$: $2x^2 + x - 1 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$

Comme : $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$

$x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ donc : $S = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

2) a) La proposition : $P$ : " $\exists x \in \mathbb{R} / 2x^2 + x - 1 = 0$" est vraie car il existe $x = -1 \in \mathbb{R}$

et vérifie : $2x^2 + x - 1 = 0$ en effet : $2(-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$

b) La proposition : $Q$ " $\exists n \in \mathbb{N} / 2n^2 + 3n - 2 = 0$" est fausse car les solutions de

l'équation $2n^2 + n - 1 = 0$ sont : $n_1 = -2$ et $n_2 = \frac{1}{2}$ Mais : $n_1 = -1 \notin \mathbb{N}$ et $n_2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

3) $\overline{P}$ : " $\forall x \in \mathbb{R} / 2x^2 + x - 1 \neq 0$"

**Exercice4 :** Démontrer en utilisant le Raisonnement par implications successives que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+; \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0\right)$$

**Solution :** Soit : $x \in \mathbb{R}^+$ ; Supposons que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$ et montrons que : $x = 0$

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right) = 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{x}^2 = 1 \Rightarrow 1 - x = 1 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+; \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0\right)$

**Exercice5 :** Démontrer en utilisant le Raisonnement par implications successives que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 3} \Rightarrow |x| = |y|\right)$$

**Solution :** Soit : $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ ;

Supposons que : $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 3}$ et montrons que : $|x| = |y|$

$\frac{x^2-1}{x^2+3}=\frac{y^2-1}{y^2+3}\Rightarrow\left(x^2-1\right)\left(y^2+3\right)=\left(x^2+3\right)\left(y^2-1\right)\Rightarrow x^2y^2+3x^2-y^2-3=x^2y^2-x^2+3y^2-3$

$\Rightarrow 3x^2-y^2=-x^2+3y^2\Rightarrow 4x^2=4y^2\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow\sqrt{x^2}=\sqrt{y^2}\Rightarrow|x|=|y|$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(\frac{x^2-1}{x^2+3}=\frac{y^2-1}{y^2+3}\Rightarrow|x|=|y|\right)$

**Exercice6 :** Montrer par un contre-exemple que la proposition $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$ est fausse :

**Solution :** sa négation est : $\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\prec 2$

En posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2\prec 2$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc $P$ est fausse

**Exercice7 :** Démontrer en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ et\ y\neq 2x;\left(y\neq\frac{1}{8}x\ \Rightarrow\frac{x+2y}{2x-y}\neq\frac{2}{3}\right)$

**Solution :** Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ et\ y\neq 2x;\left(y\neq\frac{1}{8}x\ \Rightarrow\frac{x+2y}{2x-y}\neq\frac{2}{3}\right)$

Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2\ \ et\ y\neq 2x$ ; Par contraposée Montrons que : $\left(\frac{x+2y}{2x-y}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow y=\frac{1}{8}x\right)$

$\frac{x+2y}{2x-y}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3(x+2y)=2(2x-y)\Rightarrow 3x+6y=4x-2y\Rightarrow -x=-8y\Rightarrow y=\frac{1}{8}x$

Par contraposée on a donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ et\ y\neq 2x;\left(y\neq\frac{1}{8}x\ \Rightarrow\frac{x+2y}{2x-y}\neq\frac{2}{3}\right)$

**Exercice8 :** Démontrer en utilisant la contraposée que :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(x+y\leq 6\ \Rightarrow x\leq 3\ \ ou\ \ y\leq 3\right)$

**Solution :** Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(x+y\leq 6\ \Rightarrow x\leq 3\ \ ou\ \ y\leq 3\right)$

Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ ; Par contraposée Montrons que : $\left(\ x\succ 3\ \ et\ \ y\succ 3\Rightarrow x+y\succ 6\right)$

$x\succ 3\ \ et\ \ y\succ 3\Rightarrow x+y\succ 3+3\Rightarrow x+y\succ 6\Rightarrow -x=-8y\Rightarrow y=\frac{1}{8}x$

Par contraposée on a donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\left(x+y\leq 6\ \Rightarrow x\leq 3\ \ ou\ \ y\leq 3\right)$

**Exercice9 :** En utilisant un raisonnement par disjonction des cas ( ou une récurrence )
Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}:5n^3+11n^2+3$

**Solution :** Raisonnement par disjonction des cas :
Soit : $n\in\mathbb{N}$. $5n^3+11n^2+3=n^2(5n+11)+3$

Premier cas : si $n$ est pair :

$n$ est pair $\Rightarrow$ $n^2$ est pair $\Rightarrow$ $n^2(5n+11)$ est pair $\Rightarrow$ $n^2(5n+11)+3$ est impair

(On utilise les propriétés des nombres pairs et impairs)

2 iem cas : si $n$ est impair :

$n$ est impair $\Rightarrow$ $5n$ est impair $\Rightarrow$ $5n+11$ est pair $\Rightarrow$ $n^2(5n+11)$ est pair

$\Rightarrow$ $n^2(5n+11)+3$ est impair

Donc : $5n^3+11n^2+3$ est un nombre impair.

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :
$\forall n \in \mathbb{N} : 5n^3 + 11n^2 + 3$ est un nombre impair.

**Exercice10 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(1)$: $x^2 - |x-2| + 5 = 0$

**Solution :** soit $S$ l'ensemble des solutions de $(1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$**:** étudions le signe de : $x-2$

Premier cas : si $x \in [2;+\infty[$ alors $|x-2| = x-2$

Donc l'équation $(1)$ devient : $x^2 - (x-2) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 7 = 0$

$\Delta = 1 - 28 = -27 \prec 0$ donc : $S_1 = \varnothing$

Deuxième cas : si $x \in ]-\infty;2[$ alors : $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

Donc l'équation $(1)$ devient : $x^2 + (x-2) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 12 = -11 \prec 0$ Donc $S_2 = \varnothing$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$

**Exercice11 :** Résoudre dans : $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(S)\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

**Solution :** $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 \\ (x-y)(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 0 \;\; ou \;\; x + y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (3x - y = 4 \;et\; x - y = 0) \;ou\; (3x - y = 4 \;et\; x + y = 0)$

$\Leftrightarrow (3x - y = 4 \;et\; x = y) \;ou\; (3x - y = 4 \;et\; x = -y)$

$\Leftrightarrow (3x - x = 4 \;et\; x = y) \;ou\; (3x + x = 4 \;et\; x = -y)$

$\Leftrightarrow (2x = 4 \;et\; x = y) \;ou\; (4x = 4 \;et\; x = -y) \Leftrightarrow (x = 2 \;et\; x = y) \;ou\; (x = 1 \;et\; x = -y)$

$\Leftrightarrow ((x;y) = (2;2)) \;ou\; ((x;y) = (1;-1))$

Par suite : $S = \{(2;2);(1;-1)\}$

**Exercice12 :** 1) Montrer que :$\left(\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2\right) : a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ Montrer que : $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$

**Solution :** 1)a) $\Rightarrow$:Montrons que

$\left(\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2\right) : a + b = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$ ?

Supposons que ; $a + b = 0$ et ( $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ) et $(a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2$

Donc $a + b \succ 0$ contradiction par suite : $a = 0$ et $b = 0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a = 0$ et $b = 0$ alors on aura $a + b = 0$

Donc : $\left(\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2\right) : a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ : $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right) + \left(\sqrt{y^2+1} - 1\right) = 0$ or $\sqrt{x^2+1} - 1 \geq 0$ et $\sqrt{y^2+1} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 1 = 0$ et $\sqrt{y^2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 1$ et $\sqrt{y^2+1} = 1$

$\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

**Exercice13 :** Soient $a \succ 0$ et $b \succ 0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

**Solution :** Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$ donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$ Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc en divisant par a−b on obtient :

a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

**Exercice14 :** Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P$: $(\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\, x \leq y \Rightarrow x^4 \leq y^4$

2) $Q$: $(\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[)\, x \times y=1 \Leftrightarrow x=y=1$

3) $R$: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 1$

**Solution :**1) $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

$\overline{P}$: $(\exists x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R})\, x \leq y \ et \ x^4 \succ y^4$

$(\exists x=-2 \in \mathbb{R});(\exists y=-1 \in \mathbb{R})\, -2 \leq -1 \ et \ (-2)^4=16 \succ (-1)^4=1$

On a : $\overline{P}$ est vraie car par suite : $P$ est une proposition fausse.

2) $Q$: $(\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[): x \times y=1 \Rightarrow x=y=1$

Soit : $(x;y) \in ([1.+\infty[)^2$

Montrons : $x \times y=1 \Rightarrow x=y=1$

Supposons : $x \times y=1$ et Montrons : $x=1$ et $y=1$

Par l'absurde Supposons : $x \neq 1$ ou $y \neq 1$

puisque $(x;y) \in ([1.+\infty[)^2$ alors : $x \succ 1$ ou $y \succ 1$ et donc : $xy \succ 1$ absurde

Donc : $x=y=1$

Donc : $Q:(\forall x \in [1.+\infty[);(\forall y \in [1.+\infty[): x \times y=1 \Rightarrow x=y=1$ est vraie

$\overline{Q}$: $(\exists x \in [1.+\infty[);(\exists y \in [1.+\infty[): x \times y=1 \ et (\ x \neq 1 \ ou \ y \neq 1)$

3) $R$: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 1$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1$

$\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 1+0 \Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 1$

Donc : $R$ est vraie

**Exercice15 :** On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient $x_1$ ; $x_2$; $x_3$; $x_4$ ; ; $x_n$ des éléments de l'ensemble $A$ distincts deux a deux

Montrer que : $\exists i \in A /\ x_i - i$ est pair

**Solution :** Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $\forall i \in A/ \ x_i - i$ est impair

On a donc : $S=(x_1-1)+(x_2-2)+(x_3-3)+...+(x_n-n)$ un nombre entier impair

Car c'est la somme d'un nombre impair de nombres impairs

Or : $S=(x_1+x_2+x_3+...+x_n)-(1+2+3+...+n)=0$ est 0 est pair

Nous obtenons donc une contradiction

Donc : $\exists i \in A/ \ x_i - i$ est pair

**Exercice16 :** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

**Solution :** Montrons $\exists k \in \mathbb{N} / n^3+2n=3k$

1étapes : Pour n=0 nous avons $0^3+2\times 0=0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3+2n=3k$

3étapes : Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3+2(n+1)=3k'$ ??

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ Avec $k'=k+n^2+n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

**Exercice17:** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $2\times 3^{n-1}+5^n+1$ est un multiple de 8

**Solution :** 1étapes : l'initialisation : Pour n =1 nous avons : $2\times 3^{1-1}+5^1+1=2+5+1=8$

et $8$ est un multiple de 8

Donc P (1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : soit : $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 2\times 3^{n-1}+5^n+1=8k$

Donc : $\exists k \in \mathbb{N} / 5^n=8k-2\times 3^{n-1}-1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 2\times 3^n+5^{n+1}+1=8k'$ ??

$2\times 3^n+5^{n+1}+1=2\times 3^n+5^n\times 5^1+1=2\times 3^n+(8k-2\times 3^{n-1}-1)\times 5^1+1$

$2\times 3^n+5^{n+1}+1=2\times 3^n+8k\times 5-10\times 3^{n-1}-5+1=6\times 3^{n+1}+8k\times 5-10\times 3^{n-1}-4$

$2\times 3^n+5^{n+1}+1=8k\times 5-4(3^{n-1}+1)$ or 3 est impair donc : $3^{n-1}$ est aussi impair et donc : $3^{n-1}+1$ est pair

C'est-à-dire : $\exists k' \in \mathbb{N} / 3^{n-1}+1=2k'$

Donc : $2\times 3^n+5^{n+1}+1=8k\times 5-4\times 2k'$

Par suite : $2\times 3^n+5^{n+1}+1=8k\times 5-8k'=8(5k-k')=8k''$ avec $k''=5k-k' \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $2\times 3^{n-1}+5^n+1$ est un multiple de 8

**Exercice18 :** (Récurrence) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$.

**Solution :** Notons P(n) La proposition "$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $\sum_{k=1}^{1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1+1}{3^1} = \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2\times 1+5}{3^1}\right) = \frac{1}{4}\times\left(5-\frac{7}{3^1}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

Donc : $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$

3étapes : Nous allons montrer que : P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$ ??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k+1}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3^k} + \frac{n+2}{3^{n+1}}$ d'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right) + \frac{n+2}{3^{n+1}} = \frac{1}{4}\times\left(5-\frac{6n+15-4n-8}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\times\left(5-\frac{2n+5}{3^n}\right)$.

**Exercice19 :** Montrer que : l'équation : $P(n) = 7n^5 + 2n^3 - n - 3 = 0$

N'admet pas de solutions entière (dans $\mathbb{Z}$ )

**Solution :** Méthode : Soit $P$ une proposition mathématique. Pour montrer que $P$ est vraie, on peut supposer que $P$ est fausse et obtenir une absurdité.

Par l'absurde, supposons :

$\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que : $P(n) = 7n^5 + 2n^3 - n - 3 = 0$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} /\ n(7n^4 + 2n^2 - 1) = 3$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} /\ n$ Divise 3 qui est un nombre premier

$\Rightarrow n \in \{-3; -1; 1; 3\}$

$7n^5 + 2n^3 - n - 3 = 0$

Or : $P(0) = 7\times 0^5 + 2\times 0^3 - 0 - 3 = -3 \neq 0$ et $P(1) = 7\times 1^5 + 2\times 1^3 - 1 - 3 = 5 \neq 0$

$P(-1) = 7\times(-1)^5 + 2\times(-1)^3 - (-1) - 3 = -11 \neq 0$ et $P(3) \neq 0$ et $P(-3) \neq 0$

Donc : Contradiction car aucun $n \in \{-3; -1; 1; 3\}$ n'est solutions

Par suite l'équation n'admet pas de solutions entière (dans $\mathbb{Z}$ )

**PROF: ATMANI NAJIB**

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*