1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°17 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Déterminer, en justifiant la réponse, la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et déterminer leurs négations :

1) P : " $\exists x \in \mathbb{R} / x^2+3x+7=0$"

2) Q : « $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2=9 \Rightarrow x=-3$ »

3) R : « $\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

4) S : « $\sqrt{3}+\sqrt{5}>2\sqrt{2}$ et $\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

5) T : « $\exists n \in \mathbb{N}; 2n+5$ est $pair$ » ou « $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n>10$ »

6) M : « $\forall x \in \mathbb{R}; x^2+1 \geq 2x$ »

7) N : « $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; y<x+1$ »

Solution : 1) P : " $\exists x \in \mathbb{R} / x^2+3x+7=0$"

$x^2+3x+7=0$: Δ = b² – 4ac = 3² – 4 x 1 x 7 = -19. donc : pas de solution

P : " $\exists x \in \mathbb{R} / x^2+3x+7=0$" est fausse

$\overline{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R} / x^2+3x+7 \neq 0$"

2) Q : « $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2=9 \Rightarrow x=-3$ »

Soit : $a \in \mathbb{R}^-$: $x^2=9 \Rightarrow x=-\sqrt{9}\ ou\ x=\sqrt{9} \Rightarrow x=-3\ ou\ x=3$ et puisque : $x \in \mathbb{R}^-$

Alors : Q : $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2=9 \Rightarrow x=-3$ est vraie

$\overline{Q}$: « $\exists x \in \mathbb{R}^-; x^2=9\ et\ x \neq -3$ »

3) R : « $\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{5}=8+2\sqrt{15}$ et $\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ donc : $\sqrt{3}+\sqrt{5} \succ 2\sqrt{2}$

Donc : "$\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}$" est fausse

$\sqrt{3+5}^2=\sqrt{8}^2=8$ et $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=8+2\sqrt{15}$ donc : "$\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$" est fausse

Par suite : R : « $\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ » est vraie (voir la table de vérité de l'implication)

$\overline{R}$: « $\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}\ et\ \sqrt{3+5} \neq \sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

4) S : « $\sqrt{3}+\sqrt{5}>2\sqrt{2}$ et $\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

"$\sqrt{3}+\sqrt{5}>2\sqrt{2}$" est vraie et "$\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$" est fausse

Par suite : S : « $\sqrt{3}+\sqrt{5}>2\sqrt{2}$ et $\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ » est fausse

$\overline{S}$: « $\sqrt{3}+\sqrt{5} \leq 2\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3+5} \neq \sqrt{3}+\sqrt{5}$ »

5) T : « $\exists n \in \mathbb{N}; 2n+5$ est $pair$ » ou « $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n>10$ »

Soit $n \in \mathbb{N}$: $2n+5=2n+4+1=2(n+2)+1=2k+1\ est\ donc : impair$

"$\exists n \in \mathbb{N}; 2n+5$ est $pair$" est fausse

"$\exists n \in \mathbb{N}; 2^n>10$" est vraie car pour : $n=4; 2^4=16>10$

Par suite : T : « $\exists n \in \mathbb{N}; 2n+5$ est $pair$ » ou « $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n>10$ » est vraie

$\overline{T}$: « $\forall n\in\mathbb{N};2n+5\ \ est\ impair$ » et « $\forall n\in\mathbb{N};2^{n}\le 10$ »

6) Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^{2}+1-2x=(x-1)^{2}\ge 0$

Donc : M : « $\forall x\in\mathbb{R};x^{2}+1\ge 2x$ » est vraie

$\overline{M}$: « $\exists x\in\mathbb{R};x^{2}+1\prec 2x$ »

7) N : « $\forall x\in\mathbb{R};\exists y\in\mathbb{R};y<x+1$ »

Soit $x\in\mathbb{R}$:pour $y=x$ on a : $x<x+1$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R};\exists y=x\in\mathbb{R};y<x+1$ est vraie et $\overline{N}$: « $\exists x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R};y\ge x+1$ »

8) E : « $2\sqrt{17}<69\ \Rightarrow\left(\cos\pi=-1\ \ ou\ \ 2^{20024}-1\prec 123232659\right)$ »

$\left(\cos\pi=-1\ \ ou\ \ 2^{20024}-1\prec 123232659\right)$ est vraie car : $\cos\pi=-1$ est vraie

Donc : S : « $2\sqrt{17}<69\ \Rightarrow\left(\cos\pi=-1\ \ ou\ \ 2^{20024}-1\prec 123232659\right)$ » est vraie

(voir la table de vérité de l'implication)

$\overline{E}$: « $2\sqrt{17}<69\ \ et\left(\cos\pi\ne-1\ \ et\ \ 2^{20024}-1\ge 123232659\right)$ »

Exercice2 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $2x^{2}+3x-2=0$

2) Déduire la valeur de vérité des propositions suivantes :

P : " $\exists x\in\mathbb{R}\,/\,2x^{2}+3x-2=0$ " ; Q " $\exists n\in\mathbb{N}\,/\,2n^{2}+3n-2=0$ "

3) Donner la négation de la proposition P

Solution : 1) (E): $2x^{2}+3x-2=0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 2}=-2$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{1}{2}$

$x_1=-2$ et $x_2=\frac{1}{2}$ donc : $S=\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$

2) a) La proposition : P : " $\exists x\in\mathbb{R}\,/\,2x^{2}+3x-2=0$ " est vraie car il existe $x=-2\in\mathbb{R}$

Tel que : $2x^{2}+3x-2=0$; en effet : $2(-2)^{2}+3(-2)-2=8-6-2=0$

b) La proposition : Q " $\exists n\in\mathbb{N}\,/\,2n^{2}+3n-2=0$ " est fausse car les solutions de l'équation $2n^{2}+3n-2=0$ sont : $n_1=-2$ et $n_2=\frac{1}{2}$ Mais : $n_1=-2\notin\mathbb{N}$ et $n_2=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$

3) $\overline{P}$: " $\forall x\in\mathbb{R}\,/\,2x^{2}+3x-2\ne 0$ "

Exercice3 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});2x^{2}+xy+5y^{2}\ne 0$ »

2) Q: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=2\Rightarrow x\succ 2$ »

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N}^{*})\,/\,\sqrt{4n^{2}+5n}\notin\mathbb{N}$ »

Solution : 1) P: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});3x^{2}-xy+4y^{2}\ne 0$ »

Pour : $x=1\in\mathbb{R}$: $2\times 1^{2}+1y+5y^{2}=5y^{2}+y+2$

$\Delta=1^{2}-40=-39\prec 0$ donc : $5y^{2}+y+2=0$ n'a pas solution c'est-à-dire : $5y^{2}+y+2\ne 0$

Alors P: est vraie

$\overline{P}$: « $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});2x^{2}+xy+5y^{2}=0$ »

2) Q : « $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x-y=1\Rightarrow x\succ 1$ » donc : $\overline{Q}$: « $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/\,x-y=2\ et\ x\le 2$ »

Pour : $x=1$ et $y=-1$ on a : $x-y=1-(-1)=2\quad et\quad 1\le 2$

Alors la proposition $\overline{Q}$: est vraie et par suite : Q : Fausse

3) R: « $(\forall n\in\mathbb{N}^*)/\,\sqrt{4n^2+5n}\notin\mathbb{N}$ » donc : $\overline{R}$: « $(\exists n\in\mathbb{N}^*)/\,\sqrt{4n^2+5n}\in\mathbb{N}$ »

Pour : $n=1$: $\sqrt{4\times 1^2+5\times 1}=\sqrt{9}=3\in\mathbb{N}$

Alors la proposition $\overline{R}$:est vraie et par suite : R: Fausse

Exercice4 : Soit $P\ ;Q\ \ et\ \ R$ trois propositions.

Démontrer que les propositions "$P\ et(\ Q\ \ ou\ \ R)$"et "$(P\ \ et\ Q\,)\ ou(\ P\ \ et\ \ R)$"sont équivalentes.

Solution : On va dresser les tables de vérité de ces deux propositions et démontrer que leurs résultats sont identiques. On a d'une part :

P	Q	R	$Q\ \ ou\ \ R$	$P\ et(\ Q\ \ ou\ \ R)$
F	F	F	F	F
F	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	V	V	V	F
V	F	F	F	F
V	F	V	V	V
V	V	F	V	V
V	V	V	V	V

D'autre part :

P	Q	R	$P\ \ et\ Q$	$P\ \ et\ \ R$	$(P\ \ et\ Q\,)\ ou(\ P\ \ et\ \ R)$
F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V
V	V	V	V	V	V

La lecture de ces deux tables de vérité nous dit bien que les deux propositions sont équivalentes.

Exercice5 : Démontrer en utilisant le Raisonnement par implications successives que :

$$\forall x\in\mathbb{R};\left(2\le x\le 3\Rightarrow\frac{1}{3}\le\frac{x}{x^2-3}\le 3\right)$$

Solution : Soit : $x\in\mathbb{R}$; Supposons que : $2\le x\le 3$ et montrons que : $\frac{1}{3}\le\frac{x}{x^2-3}\le 3$

$$2\le x\le 3\Rightarrow 2^2\le x^2\le 3^2\Rightarrow 4\le x^2\le 9\Rightarrow 4-3\le x^2-3\le 9-3\ \Rightarrow 1\le x^2-3\le 6$$

$\Rightarrow\frac{1}{6}\le\frac{1}{x^2-3}\le 1$ et comme : $2\le x\le 3$ $\Rightarrow\frac{1}{6}\times 2\le x\times\frac{1}{x^2-3}\le 1\times 3\ \Rightarrow\frac{1}{3}\le\frac{x}{x^2-3}\le 3$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R};\left(2\le x\le 3\Rightarrow\frac{1}{3}\le\frac{x}{x^2-3}\le 3\right)$

Exercice6 : Ecrire les propositions suivantes en utilisant des symboles logiques convenables :
1)(P)«pour tout entier naturel n, il existe un nombre réel t tel que la racine carrée de n est égale à t »
2) (Q) : « Pour tous nombres réel x et y , il existe un entier naturel p , tel que la somme des carrés de x et de y est égale au cube du nombre p »
3) (R) : « le système formé par les deux équations $3x-2y=5$ et $x+y=-3$ admet un couple unique solution dans $\mathbb{R}^2$ »

Solution : 1) P: « $\forall n\in\mathbb{N};\exists t\in\mathbb{R};\sqrt{n}=t$ »
2) Q: « $\forall x\in\mathbb{R};\forall x\in\mathbb{R};\exists p\in\mathbb{N}/x^2+y^2=p^3$ »
3) $R"\exists!(x,y)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}3x-2y=5\\x+y=-3\end{cases}"$

Exercice7 : 1) En utilisant un raisonnement par équivalence : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $x+\frac{1}{x}\geq 2$
2) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $x^6\geq 2x^3-2$

Solution :1) Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$
$x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq\Leftrightarrow(x-1)^2\geq 0$ Proposition vraie
Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $x+\frac{1}{x}\geq 2$ est aussi une Proposition vraie
2) Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$: On a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $x+\frac{1}{x}\geq 2$ donc : puisque : $x^3\in\mathbb{R}_+^*$ alors : $x^3+\frac{1}{x^3}\geq 2$
Donc : $\frac{(x^3)^2+1}{x^3}\geq 2$ c'est-à-dire : $x^6+1\geq 2x^3$
Donc : $x^6\geq 2x^3-1$ or : $2x^3-1\geq 2x^3-2$
Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $x^6\geq 2x^3-2$

Exercice8 : Démontrer en utilisant la contraposée que : $\forall x\in\mathbb{R};(x+x^3\leq 2\Rightarrow x\leq 1)$

Solution : Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :
$\forall x\in\mathbb{R};(x+x^3\leq 2\Rightarrow x\leq 1)$
Soit : $x\in\mathbb{R}$; Par contraposée Montrons que : $(x\succ 1\Rightarrow x+x^3\succ 2)$
Supposons que : $x\succ 1$ alors : $x^3\succ 1^3$ c'est-à-dire :
$x\succ 1$ et $x^3\succ 1\Rightarrow x+x^3\succ 1+1\Rightarrow x+x^3\succ 2$
Donc : $(x\succ 1\Rightarrow x+x^3\succ 2)$
Par contraposée on a donc : $\forall x\in\mathbb{R};(x+x^3\leq 2\Rightarrow x\leq 1)$

Exercice9 : En utilisant un raisonnement par disjonction des cas (ou une récurrence)
Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}:n^2+n+1$

Solution : Raisonnement par disjonction des cas
Soit : $n\in\mathbb{N}$.
<u>Premier cas :</u> si n est pair : $\exists k\in\mathbb{N}:n=2k$
$n^2+n+1=(2k)^2+2k+1=4k^2+2k+1=2(2k^2+k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+k\in\mathbb{N}$
Donc : n^2+n+1 est un nombre impair.
<u>2 iem cas :</u> si n est impair : $\exists k\in\mathbb{N}:n=2k+1$

$n^2+n+1=(2k+1)^2+2k+1+1=4k^2+4k+1+2k+1+1=2\left(2k^2+3k+1\right)+1=2k'+1$ avec

$k'=2k^2+3k+1\in\mathbb{N}$

Donc : n^2+n+1 est un nombre impair.

Par suite : d'après le principe par disjonction des cas :

$\forall n\in\mathbb{N}: n^2+n+1$ est un nombre impair.

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1): $x^2-|x-2|-4=0$

Solution : $(E): x^2-|x-2|-4=0$: Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$ C'est-à-dire : $x^2-x-2=0$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2\times 1}=-1$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+\sqrt{9}}{2\times 1}=2$

Mais : $x_1=-1\notin[2;+\infty[$ donc : $S_1=\{2\}$

Si $x\prec 2$ alors : $x-2\leq 0$ donc : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2+(x-2)-4=0$ c'est à dire : $x^2+x-2-4=0$

Signifie : $x^2+x-6=0$: donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{25}}{2\times 1}=-3$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times 1}=2$

Mais : $x_2=2\notin]-\infty;2[$ donc : $S_2=\{-3\}$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\{-3;2\}$.

Exercice11 : Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

Montrer par l'absurde que : $x\leq\sqrt{2}$ ou $\dfrac{1}{y}\leq\sqrt{2}$ ou $y+\dfrac{1}{x}\leq\sqrt{2}$

Solution : Soient : $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $y\in\mathbb{R}_+^*$

Supposons par l'absurde que : $x>\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{y}>\sqrt{2}$ et $y+\dfrac{1}{x}>\sqrt{2}$

$x>\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ❶ et $\dfrac{1}{y}>\sqrt{2}\Rightarrow y<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ❷

la somme ❶ et ❷ membre a membre donne : $y+\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Donc : $y+\dfrac{1}{x}<\sqrt{2}$ contradiction avec : $y+\dfrac{1}{x}>\sqrt{2}$

Donc : $x\leq\sqrt{2}$ ou $\dfrac{1}{y}\leq\sqrt{2}$ ou $y+\dfrac{1}{x}\leq\sqrt{2}$

Exercice12 : On considère la proposition suivante : $P:\ (\forall x\in\mathbb{R}):x<6\Rightarrow x^2<36$

1) Ecrire la négation de P
2) En utilisant un raisonnement par contre-exemple, Montrer que P est fausse.

Solution :1) On a : $P:\ (\forall x\in\mathbb{R}):x<6\Rightarrow x^2<36$ alors : $\overline{P};(\exists x\in\mathbb{R}):x<6\ \ et\ \ x^2\geq 36$

Car : $\overline{P_1\Rightarrow P_2}\Leftrightarrow P_1\ et\ \overline{P_2}$

2) On a : $\overline{P}$ est vraie car $(\exists -7\in\mathbb{R}):-7<6\ \ et\ \ (-7)^2=49\geq 36$

Par suite : P est une proposition fausse. (-7 est le contre-exemple)

Exercice13 : Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1) Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$
2) En déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Remarque : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.
Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b\neq 0$

$$a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow b\sqrt{2}=-a\Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{2}$$

Or $a;b\in\mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b=0$ et puisque : $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=0$
2) supposons que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc $a-a'+b\sqrt{2}-b'\sqrt{2}=0$
Donc $a-a'+\sqrt{2}(b-b')=0$ et d'après 1**) on aura :** $a-a'=0$ et $b-b'=0$

Donc $a=a'$ et $b=b'$

Exercice14 : 1) Montrer que si : $2n+1$ est un carré parfait alors $(n+1)^2$ est la somme de deux carrés parfaits.
2)Montrer que si : $n+1$ est un carré parfait alors $14n+14$ est la somme de trois carrés parfaits.

Solution : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$
Supposons que si : $2n+1$ est un carré parfait alors il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que : $2n+1=m^2$

$$(n+1)^2=n^2+(2n+1)=n^2+m^2$$

alors $(n+1)^2$ est la somme de deux carrés parfaits.

2) Supposons que si : $n+1$ est un carré parfait alors il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que : $n+1=m^2$

$$14n+14=14(n+1)=14m^2=m^2+9m^2+4m^2=m^2+(3m)^2+(2m)^2$$

alors $14n+14$ est la somme de trois carrés parfaits.

Exercice15 : Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $10^{3n+2}+10^{3n+1}+1$ est un multiple de 111

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons :$10^{3\times0+2}+10^{3\times0+1}+1=100+10+1=111$ et 111 est un multiple de 111
Donc P (0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : soit : $n\in\mathbb{N}$
Supposons que P(n) soit vraie C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,10^{3n+2}+10^{3n+1}+1=111k$
Donc : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,10^{3n+2}=111k-10^{3n+1}-1$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,10^{3n+5}+10^{3n+4}+1=111k'$??

$$10^{3n+5}+10^{3n+4}+1=10^{3n+2}\times10^3+10^{3n+1}\times10^3+1=\left(111k-10^{3n+1}-1\right)\times10^3+10^{3n+1}\times10^3+1$$

$$=111k\times10^3-10^{3n+1}\times1000-1000+10^{3n+1}\times1000+1=111k\times10^3-1000+1$$

$=111k\times10^{3}-999=111\left(k\times10^{3}-9\right)=111k'$ avec $k'=k\times10^{3}-9\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; $10^{3n+2}+10^{3n+1}+1$ est un multiple de 111

Exercice16 : 1) On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$: $S_n=1^2+3^2+5^2+\ldots+\left(2n-1\right)^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(2k+1\right)^2$

1) Calculer : S_1 ; S_2 et S_3

2)Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$; $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(2k+1\right)^2=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$.

Solution : 1) $S_1=1^2=\sum_{k=0}^{k=0}\left(2k+1\right)^2=1$ et $S_2=1^2+3^2=\sum_{k=0}^{k=1}\left(2k+1\right)^2=1+9=10$

$S_3=1^2+3^2+5^2=\sum_{k=0}^{k=2}\left(2k+1\right)^2=1+9+25=35$

2)Notons P(n) la proposition : "$S_n=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^{*}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $S_1=1$ et $\dfrac{1\left(4\times1^2-1\right)}{3}=\dfrac{3}{3}=1$ donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : soit $n\in\mathbb{N}^{*}$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(2k+1\right)^2=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n}\left(2k+1\right)^2=\dfrac{\left(n+1\right)\left(4\left(n+1\right)^2-1\right)}{3}=\dfrac{\left(n+1\right)\left(4n^2+8n+3\right)}{3}$??

C'est-à-dire montrons que : $S_{n+1}=\dfrac{4n^3+8n^2+3n+4n^2+8n+3}{3}=\dfrac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$??

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n}\left(2k+1\right)^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(2k+1\right)^2+\left(2n+1\right)^2$

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(2k+1\right)^2=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$

Donc : $S_{n+1}=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}+\left(2n+1\right)^2=\dfrac{4n^3-n+3\left(2n+1\right)^2}{3}=\dfrac{4n^3-n+3\left(4n^2+4n+1\right)}{3}$

Donc : $S_{n+1}=\dfrac{4n^3-n+12n^2+12n+3}{3}=\dfrac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$; $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(2k+1\right)^2=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$.

Exercice17 : Montrer que Pour tout entier naturel non nul n,
n^2-1 est divisible par 8 si et seulement si n est impair.

Solution : Nous procédons par double implication

Montrons d'abord, que si n est impair, alors n^2-1 est divisible par 8 .

En effet, si n est un entier naturel impair, alors :

$\exists k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k+1$et on aura alors:

$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1)$ or comme le produit de deux entiers naturels

Consécutifs est pair, il existe un entier naturel m tel que : $k(k+1) = 2m$

On aura donc $n^2 - 1 = 8m$ avec m entier naturel. C'est-a-dire, $n^2 - 1$ est divisible par 8 .

Montrons maintenant l'implication inverse, c'est-à-dire si $n^2 - 1$ est divisible par 8 alors n est impair

Raisonnons par l 'absurde et supposons que : $n^2 - 1$ est divisible par 8 et que n est pair

Signifie : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k$

Donc : $n^2 - 1 = n^2 - 1^2 = (n+1)(n-1) = (2k+1)(2k-1)$ est un nombre impair, car produit des deux nombres impairs $2k+1$ et $2k-1$

Ceci est contradictoire avec Hypothèse que $n^2 - 1$est divisible par 8

D'où n est impaire.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien