1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°16 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 :1) Traduire symboliquement la proposition P : suivante :

P : « Pour tout couple de réels, si la somme et le produit de ces deux réels est rationnel, alors ces deux réels sont deux rationnels »

2) Donner la négation de la proposition P :

3) Déterminer la valeur de vérité de la proposition P :

Solution :1) P : " $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});(x+y\in\mathbb{Q}\, et\, x\times y\in\mathbb{Q})\Rightarrow(x\in\mathbb{Q}\ \ et\ y\in\mathbb{Q})$

2) $\overline{P}$: " $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});(x+y\in\mathbb{Q}\, et\, x\times y\in\mathbb{Q})\ et\,(x\notin\mathbb{Q}\ \ ou\ y\notin\mathbb{Q})$

3) Donnons un contre-exemple pour montrer que : P : est fausse.

Prenons : $x=2+\sqrt{3}$ et $y=2-\sqrt{3}$ on a : $x+y=4$ et $x\times y=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=1$

Donc x et y sont deux réels dont la somme et le produit sont des rationnels, sans qu'aucun d'eux ne le soit

Donc : P : est une proposition fausse

Exercice2 : On considère les propositions suivantes :

$P:(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$ et $Q:(\forall n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\in\mathbb{N}$

$R:(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}):\left[|a|\prec c\ et|b|\prec c\Rightarrow\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\prec c\right]$

1) Déterminer la valeur de vérité de P

2) Ecrire la négation des propositions P et Q et R

3) Montrer que la proposition Q est fausse

Solution :1) $P:(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$

$xy+2y+x+2=0\Leftrightarrow y(x+2)+x+2=0\Leftrightarrow(x+2)(y+1)=0$

Si je prends : $y=-1$ alors : $(\forall x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2=0$

La proposition P est vraie

2) $\overline{P}:(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R}):xy+2y+x+2\neq0$

$\overline{Q}:(\exists n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\notin\mathbb{N}$

$\overline{R}:(\exists(a;b;c)\in\mathbb{R}):\left[|a|\prec c\ et|b|\prec c\ \ et\ \ \left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\geq c\right]$

3) Déterminons la valeur de vérité de Q

On a : $\overline{Q}:(\exists n\in\mathbb{N}^*):\sqrt{n(n+1)+1}\notin\mathbb{N}$

Pour : $n=1:\sqrt{1(1+1)+1}=\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$

Donc La proposition $\overline{Q}$: est vraie par suite Q est fausse

Exercice3 : Montrer que : $(\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3):x+y+z=0\Rightarrow|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\frac{1}{2}(|x|+|y|+|z|)$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$: On suppose que : $x+y+z=0$

On a : $|x-y|+|y-z|+|z-x|=\frac{1}{2}(2|x-y|+2|y-z|+2|z-x|)$

C'est-à-dire : $=\frac{1}{2}\left(\left(|x-y|+|y-z|\right)+\left(|y-z|+|z-x|\right)+\left(|z-x|+|x-y|\right)\right)$

$|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\frac{1}{2}\left(|x-2y+z|+|y-2z+x|+|z-2x+y|\right)$

Et on a : $x+y+z=0$ donc : $|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\frac{1}{2}\left(|-3x|+|-3z|+|-3y|\right)$

Donc : $|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\frac{3}{2}\left(|x|+|z|+|y|\right)$

Donc : $|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\frac{1}{2}\left(|x|+|z|+|y|\right)$ Car : $\frac{3}{2}\left(|x|+|z|+|y|\right)\geq\frac{1}{2}\left(|x|+|z|+|y|\right)$

Exercice4 : Montrer que : $\forall\left(a;b;c\right)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$; $a^2+b^2+c^2\prec 1\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq\frac{1}{abc}$

Solution : Nous raisonnons par contraposition : Soit : $\left(a;b;c\right)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$

Montrons que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 1$

Supposons que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$

On a : $\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(b-c\right)^2\geq 0$; (vraie) $\Rightarrow\left(a^2-2a\times b+b^2\right)+\left(a^2-2a\times c+c^2\right)+\left(b^2-2b\times c+c^2\right)\geq 0$

$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2a\times b-2a\times c-2b\times c\geq 0$

$\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2\left(a\times b+a\times c+b\times c\right)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$ Comme on a : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$

$\Rightarrow abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{abc}abc\Rightarrow bc+ac+ab=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 1$

Donc : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 1$

Alors : par contraposition : $\forall\left(a;b;c\right)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$; $a^2+b^2+c^2\prec 1\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq\frac{1}{abc}$

Exercice5 : 1) a) En utilisant un raisonnement par équivalence :

Montrer que : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1}\leq a+1$

b) Montrer que : $\forall\left(a;b\right)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

2) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$: $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2}\leq x+y+1$

Indication : appliquer b) puis a)

Solution : 1) Soit : $a\in\mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{2a+1}\leq a+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2a+1}\right)^2\leq\left(a+1\right)^2\Leftrightarrow 2a+1\leq a^2+2a+1\Leftrightarrow 0\leq a^2$ Proposition vraie

Donc : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{2a+1}\leq a+1$ est aussi une Proposition vraie

2) Soit : $\left(a;b\right)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$

$$\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\Leftrightarrow\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\leq\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\leq 2a^2+2b^2\Leftrightarrow 2ab\leq a^2+b^2\Leftrightarrow 0\leq a^2+b^2-2ab\Leftrightarrow 0\leq\left(a-b\right)^2$$

Donc : $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$ Proposition vraie

Donc : $\forall (a;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ est aussi une Proposition vraie

2) Soients : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$

$x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x \succ 0 \Rightarrow 4x \succ 0 \Rightarrow 4x+1 \succ 1 \quad et\ 1 \succ 0 \Rightarrow a = 4x+1 \succ 0$

$y \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow y \succ 0 \Rightarrow 4yx \succ 0 \Rightarrow 4y+1 \succ 1 \quad et\ 1 \succ 0 \Rightarrow b = 4y+1 \succ 0$

D'après b) on a alors : $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \leq \sqrt{\frac{\sqrt{4x+1}^2+\sqrt{4y+1}^2}{2}}$

Donc : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \leq \sqrt{\frac{4x+1+4y+1}{2}}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \leq \sqrt{\frac{4x+4y+2}{2}}$

Donc : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \leq \sqrt{2x+2y+1}$ c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \leq \sqrt{2(x+y)+1}$ ❶

D'après a) et puisque : $a = x+y \succ 0$ alors : $\sqrt{2(x+y)+1} \leq x+y+1$ ❷

De : ❶ et ❷ En déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \leq x+y+1$

Exercice6 : Soit $P(n)$ la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par : « $7^n - 1$ Est divisible par 3 »

1) Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

2) Que peut-on conclure

Solution : 1) Démontrons que : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Supposons que : $7^n - 1$ est divisible par 3 c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 7^n - 1 = 3k$

Montrons que : $7^{n+1} - 1$ est divisible par 3 ??

$7^{n+1} - 1 = 7^n \times 7^1 - 1 = (3k+1) \times 7 - 1 = 3 \times 7k + 7 - 1 = 3 \times 7k + 6 = 3 \times (7k+2) = 3 \times k'$

Donc : $7^{n+1} - 1$ est divisible par 3

Donc : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

2) On ne peut rien conclure avant de vérifier l'initialisation : $P(0)$ est vraie ou non ?????

$7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ est divisible par 3

Donc $P(0)$ est vraie

Et on a montré que : si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : « $\forall n \in \mathbb{N}$ $7^n - 1$ est divisible par 3 » (vraie)

Exercice7 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1}$ est un multiple de 11

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons :

$3^{5\times0} + 4^{5\times0+2} + 5^{5\times0+1} = 1 + 16 + 5 = 22 = 2 \times 11$

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1} = 11k$ donc : $\exists k \in \mathbb{N} / 3^{5n} = 11k - 4^{5n+2} - 5^{5n+1}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 3^{5n+5} + 4^{5n+5+2} + 5^{5n+5+1} = 11k'$??

$3^{5n+5} + 4^{5n+5+2} + 5^{5n+5+1} = 3^{5n} \times 3^5 + 4^{5n+2} \times 4^5 + 5^{5n+1} \times 5^5$

$=\left(11k-4^{5n+2}-5^{5n+1}\right)\times 3^5+4^{5n+2}\times 4^5+5^{5n+1}\times 5^5=11k\times 3^5-4^{5n+2}\times 3^5-5^{5n+1}\times 3^5+4^{5n+2}\times 4^5+5^{5n+1}\times 5^5$

$=11k\times 3^5+\left(4^5-3^5\right)4^{5n+2}+\left(5^5-3^5\right)5^{5n+1}=11k\times 3^5+\left(1024-243\right)4^{5n+2}+\left(3125-243\right)5^{5n+1}$

$=11k\times 3^5+781\times 4^{5n+2}+2882\times 5^{5n+1}=11k\times 3^5+71\times 11\times 4^{5n+2}+262\times 11\times 5^{5n+1}$

$=11\left(k\times 3^5+71\times 4^{5n+2}+262\times 5^{5n+1}\right)=11k'$ avec $k'=k\times 3^5+71\times 4^{5n+2}+262\times 5^{5n+1}\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}: 3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ est un multiple de 11

Exercice8 : Soit a un élément de $]0,1[$

1)Montrer que : $\forall(p;q)\in\mathbb{N}^2$ « $p\le q\Rightarrow a^p\ge a^q$ »

2) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $a+a^2+...+a^n=a\dfrac{1-a^n}{1-a}$

b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1-a^n\ge n\left(1-a\right)a^{n-1}$

3) Prends : $a=1-\dfrac{1}{n^2}$ et montrer que : "$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le 1$ "

Solution : 1) Soit : $(p;q)\in\mathbb{N}^2$

Supposons $p\le q$: alors : $\exists k\in\mathbb{N}/\ q=p+k$

$a^p-a^q=a^p-a^{p+k}=a^p\left(1-a^k\right)$ et comme : $a\in]0,1[\Rightarrow 0\prec a\prec 1\Rightarrow 0\prec a^k\le 1\Rightarrow 0\le 1-a^k$

Donc : $a^p-a^q\ge 0\Rightarrow a^p\ge a^q$

Donc : $\forall(p;q)\in\mathbb{N}^2$ « $p\le q\Rightarrow a^p\ge a^q$ »

2) a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $a+a^2+...+a^n=a\dfrac{1-a^n}{1-a}$

Notons P(n) la proposition : " $a+a^2+...+a^n=a\dfrac{1-a^n}{1-a}$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons : $a^1=a$ et $a\dfrac{1-a^1}{1-a}=a$

Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : Soit : $n\in\mathbb{N}^*$

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $a+a^2+...+a^n=a\dfrac{1-a^n}{1-a}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $a+a^2+...+a^{n+1}=a\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$??

On a : $a+a^2+...+a^{n+1}=a+a^2+...+a^n+a^{n+1}$

Et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $a+a^2+...+a^n=a\dfrac{1-a^n}{1-a}$

Donc : $a+a^2+...+a^{n+1}=a\dfrac{1-a^n}{1-a}+a^{n+1}=\dfrac{a-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a}=\dfrac{a-a^{n+2}}{1-a}=a\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $a+a^2+...+a^n=a\dfrac{1-a^n}{1-a}$

b) Déduisons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1-a^n\ge n\left(1-a\right)a^{n-1}$

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$:On a : $\forall(p;q)\in\mathbb{N}^2$ « $p\le q\Rightarrow a^p\ge a^q$ »

$1\le n\Rightarrow a^n\le a^k\ \forall k\in\mathbb{N}\ et\ 1\le k\le n$ donc : $\sum_1^n a^n\le\sum_1^n a^k$

Donc : $na^n\le a\dfrac{1-a^n}{1-a}\Rightarrow na^{n-1}\le\dfrac{1-a^n}{1-a}\Rightarrow(1-a)na^{n-1}\le 1-a^n$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1-a^n\ge n(1-a)a^{n-1}$

3) Montrons que : "$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le 1$ "

Soit : $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

On prend : $a=1-\dfrac{1}{n^2}\in]0,1[\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ dans : $1-a^n\ge n(1-a)a^{n-1}$

On aura : $1-\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n\ge n\left(1-\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n-1}$

On aura donc : $1-\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n\ge\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n-1}$

Donc : $1\ge\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n-1}+\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n\ge\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n+\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ Car : $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n-1}\ge\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Par suite : $1\ge\left(\dfrac{1}{n}+1\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ "$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Exercice9 : Soient $a;b;c$ des nombres entiers relatifs impairs

1) Montrer que : l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+x-(2n+1)=0$ Où $n\in\mathbb{N}$

3) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{8n+5}\notin\mathbb{Q}$

4) Montrer que : $\sqrt{2021}\notin\mathbb{Q}$

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $r\in\mathbb{Q}$ tel que $ar^2+br+c=0$:

$r\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists p\in\mathbb{Z}$; $\exists q\in\mathbb{Z}^*$ tel que : $r=\dfrac{p}{q}$ avec $p\wedge q=1$

On a donc : $a\left(\dfrac{p}{q}\right)^2+b\left(\dfrac{p}{q}\right)+c=0$ donc : $a\dfrac{p^2}{q^2}+b\dfrac{p}{q}+c=0$

Donc : $ap^2+bpq+cq^2=0$ ①

✓ Si : p et q sont paires

2 divise p et 2 divise q donc : $p\wedge q\ne 1$

Impossible car: $p\wedge q=1$

✓ Si : p et q sont impaires

On a : ap^2 est impair et bpq est impair et cq^2 est impair

Donc : $ap^2+bpq+cq^2$ est impair

Impossible car 0 est pair

✓ Si : p est pair et q est impaire

On a : $a\,p^2$ est pair et bpq est pair et cq^2 est impair Donc : $a\,p^2+bpq+cq^2$ est impair
Impossible car 0 est pair

✓ Si : p est impaire et q sont paire

On a : $a\,p^2$ est impair et bpq est pair et cq^2 est pair Donc : $a\,p^2+bpq+cq^2$ est impair
Impossible car 0 est pair

Dans tous les cas : $a\,p^2+bpq+cq^2\neq 0$

Par suite : l'équation $a\,x^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

2)Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2+x-(2n+1)=0$ Où $n\in\mathbb{N}$

$\Delta=1^2+4(2n+1)=8n+5\succ 0$ car $n\in\mathbb{N}$

Donc : deux solutions :

$x_1=\frac{-1+\sqrt{8n+5}}{2}$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{8n+5}}{2}$ D'où : $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{8n+5}}{2};\frac{-1+\sqrt{8n+5}}{2}\right\}$

3) Déduction que : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ ;\ \sqrt{8n+5}\notin\mathbb{Q}$

Par l'absurde, supposons que : $\sqrt{8n+5}\in\mathbb{Q}$

Alors : $-1+\sqrt{8n+5}\in\mathbb{Q}$

Alors : $\frac{-1+\sqrt{8n+5}}{2}\in\mathbb{Q}$

Alors : l'équation : $1x^2+1x-(2n+1)=0$ admet des solutions dans $\mathbb{Q}$

Contradiction : car l'équation $1x^2+1x-(2n+1)=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$

$(a=1\in\mathbb{Z}\ ;\ b=1\in\mathbb{Z}\ ;\ c=-(2n+1)\in\mathbb{Z})$

4) Montrons que : $\sqrt{2021}\notin\mathbb{Q}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ ;\ \sqrt{8n+5}\notin\mathbb{Q}$

Et on a : $8n+5=2021\Leftrightarrow 8n=2016\Leftrightarrow n=252$

Donc : $\sqrt{8\times 252+5}\notin\mathbb{Q}$ c'est-à-dire : $\sqrt{2021}\notin\mathbb{Q}$

Exercice10 : Par l'absurde montrer que ; $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\notin\mathbb{N}$

Solution : Soit $n\in\mathbb{N}^*$: Par l'absurde, supposons que : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\in\mathbb{N}$ c'est-à-dire : qu'il existe $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}=m$

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}=m\Rightarrow\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2=m^2$

$\Rightarrow n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1=m^2\Rightarrow 2\sqrt{n(n+1)}=m^2-2n-1\Rightarrow m^2-2n-1\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : qu'il existe $\exists m'\in\mathbb{N}$ tel : $m^2-2n-1=m'$

donc : $\Rightarrow 2\sqrt{n(n+1)}=m'\Rightarrow 4n(n+1)=m'^2$

$\Rightarrow 4n^2+4n+1=m'^2+1\Rightarrow(2n+1)^2=m'^2+1$

$\Rightarrow(2n+1)^2-m'^2=1\Rightarrow(2n+1-m')(2n+1+m')=1$

$\Rightarrow\begin{cases}2n+1-m'=1\\2n+1+m'=1\end{cases}\Rightarrow 2n+1-m'+2n+1+m'=1+1\Rightarrow 4n=0\Rightarrow n=0$ mais on a : $n\in\mathbb{N}^*$

C'est une contradiction et ceci signifie que $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\notin\mathbb{N}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien