1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°15 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Déterminer, en justifiant la réponse, la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et déterminer leurs négations :

1) P : "$\sqrt{81} \neq \sqrt{16}+\sqrt{25}$ *ou* $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$"

2) Q : « $\forall x \in]-\infty;-5];-x^2-x+6 \leq 0$ »

3) R : « $\forall x \in \mathbb{R}^+;\sqrt{x^6+1}-x=0$ »

4) S : « $\exists n \in \mathbb{N};\forall x \in \mathbb{R}: n-1 \leq x^2$ »

Solution : 1) P : "$\sqrt{81} \neq \sqrt{16}+\sqrt{25}$ *ou* $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$"

"$\sqrt{81} \neq \sqrt{16}+\sqrt{25}$ " est fausse car : "$\sqrt{16}+\sqrt{25}=4+5=9$ *et* $\sqrt{81}=9$"

$\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ Signifie : $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$ est fausse car :

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}=5+2\sqrt{6}$ Mais : $\sqrt{5}^2=5$

P : "$\sqrt{81} \neq \sqrt{16}+\sqrt{25}$ *ou* $\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$" est fausse

$\overline{P}$: "$\sqrt{81}=\sqrt{16}+\sqrt{25}$ *et* $\sqrt{3} \neq \sqrt{5}-\sqrt{2}$"

2) Q : « $\forall x \in]-\infty;-5];-x^2-x+6 \leq 0$ »

$-x^2-x+6$: Δ = b^2 – 4ac = $(-1)^2$ + 4 x 1 x 6 = 25.

Comme : Δ > 0, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{25}}{2a}=\frac{1-5}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{25}}{2a}=\frac{1+5}{-2}=-3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-x2-x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty;-3];-x^2-x+6 \leq 0$ et Comme : $-5 \leq -3$

Q : « $\forall x \in]-\infty;-5];-x^2-x+6 \leq 0$ » est vraie

$\overline{Q}$: « $\exists x \in]-\infty;-5];-x^2-x+6 \succ 0$ »

3) R : « $\forall x \in \mathbb{R}^+;\sqrt{x^6+1}-x=0$ » alors : $\overline{R}$: « $\exists x \in \mathbb{R}^+;\sqrt{x^6+1}-x \neq 0$ »

$\overline{R}$: « $\exists x \in \mathbb{R}^+;\sqrt{x^6+1}-x \neq 0$ »; il suffit de prendre : $x=1$ $:1 \in \mathbb{R}^+;\sqrt{1^6+1}-1=\sqrt{2}-1 \neq 0$

$\overline{R}$: est vraie par suite R : est fausse

4) S : « $\exists n \in \mathbb{N};\forall x \in \mathbb{R}: n-1 \leq x^2$ »; est vraie il suffit de prendre : $n=1$ $:1 \in \mathbb{N};1-1=0 \leq x^2$

$\exists n=1 \in \mathbb{N};\forall x \in \mathbb{R}:1-1 \leq x^2$

Exercice2 : Ecrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs et les connecteurs logiques :

1) P : « l'équation $x^2=3$"n'a pas de solution réelle »

2) Q : « le carré de tout réel est supérieur ou égal à $-\sqrt{3}$" »

3) R : « l'équation $x^2=3$" admet une unique solution réelle »

Solution : 1) P: « $\forall x\in\mathbb{R};x^2\neq 3$ »

2) Q: « $\forall x\in\mathbb{R};x^2\geq -\sqrt{3}$ »

3) $R"\exists! x\in\mathbb{R}/x^2=3"$

Exercice3 : On note : ¬ P ou non P : la négation de la proposition P
Soient P et Q deux propositions.
Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes à la négation de P ⇒ Q ? Justifier à l'aide d'une table de vérité.
1) P ou (non Q) 2) (non Q) ⇒ (non P) 3) P et (non Q)

Solution : La table de vérité de ces propositions est :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P\Longrightarrow Q)$	$P\vee\neg Q$	$\neg Q\Longrightarrow\neg P$	$P\wedge\neg Q$
F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F

Comme seule la colonne de $P\wedge\neg Q$ est identique à celle de $\neg(P\Longrightarrow Q)$, on en déduit que seule Cette proposition (la troisième) est équivalente à la négation de $P\Longrightarrow Q$.

Exercice4 : On considère la proposition suivante :

P : « $\forall(x\ ;\ y)\in\mathbb{R}^2\ \left(x^2=y^2\Rightarrow|x|=|y|\right)$ »

1)Montrer que : P est une proposition vraie
2) Ecrire la négation de la propositions P

Solution : 1) *Pour* démontrer la véracité d'une implication :
P ⇒ Q on peut procéder de deux manières :
(1) Par déduction : on détermine une assertion R telle que : P ⇒ R et R ⇒ Q. (avec possibilité d'enchaîner plusieurs assertions intermédiaires)
(2) Par contraposée : on établit non(Q) ⇒ non(P)

Soient $(x\ ;\ y)\in\mathbb{R}^2$. Montrons : $x^2=y^2\Rightarrow|x|=|y|$

On va procéder Par déduction : Supposons : $x^2=y^2$.

On a : $x^2=y^2$ donc : $x^2-y^2=0$

Donc : $(x-y)(x+y)=0$

Donc : $x-y=0\ \ ou\ \ x+y=0$

Par suite : $x=y\ \ ou\ \ x=-y$

Donc : $|x|=|y|$

2) $\overline{P}$: « $\exists(x\ ;\ y)\in\mathbb{R}^2\ \left(x^2=y^2\ \ et\ |x|\neq|y|\right)$ »

Exercice5 : Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (Cochez si vous pensez)
1)f $P"\exists x\in\mathbb{R}\ ;\forall y\in\mathbb{R}\quad y\geq x^2"$
2)f $P"\forall y\in\mathbb{R}\ ;\exists x\in\mathbb{R}\quad y\geq x^2"$
3)f $P"\exists x\in\mathbb{R}\ ;\forall y\in\mathbb{R}\quad y\leq x^2"$
4)f $P"\forall y\in\mathbb{R}\ ;\exists x\in\mathbb{R}\quad y\leq x^2"$

Solution : 1) f $P"\exists x\in\mathbb{R}\ ;\forall y\in\mathbb{R}\quad y\geq x^2"$

Démontrons que : $\overline{P}$ est vraie

$\overline{P}"\forall x\in\mathbb{R}\ ;\exists y\in\mathbb{R}\quad y\prec x^2"$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ Prenons : $y=-1$ on a : $-1\prec 0\leq x^2$

P est fausse

2)f $P"\forall y\in\mathbb{R}\ ;\exists x\in\mathbb{R}\quad y\geq x^2"$ Démontrons que : $\overline{P}$ est vraie

$\overline{P}"\exists y\in\mathbb{R}\ ;\forall x\in\mathbb{R}\quad y\prec x^2"$: Prenons : $y=-1$ on a : $-1\prec x^2$ donc : P est fausse

3)f P " $\exists x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R} \quad y \leq x^2$ "

$\overline{P}$ " $\forall x \in \mathbb{R} ; \exists y \in \mathbb{R} \quad y \succ x^2$ "

Soit : $x \in \mathbb{R}$ Prenons : $y = x^2 + 1$ donc : $y \succ x^2$

$\overline{P}$ est vraie donc : P est fausse

4) ☒ P " $\forall y \in \mathbb{R} ; \exists x \in \mathbb{R} \quad y \leq x^2$ "

Soit : $y \in \mathbb{R}$; prenons $x = y+1$: $x^2 - y = (y+1)^2 - y = y^2 + 2y + 1 - y = y^2 + y + 1$ et $\Delta \prec 0$

Donc : $y^2 + y + 1 \succ 0$

Par suite : P est vraie

Exercice6 : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[$

1)Montrer que : $-1 \prec \dfrac{a+b}{1+ab} \prec 1$

2) Montrer que : $|a+b| \leq |1+ab|$

Solution : $-1 \prec \dfrac{a+b}{1+ab} \prec 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right| \prec 1 \Leftrightarrow |a+b| \prec |1+ab|$

$\Leftrightarrow |a+b|^2 \prec |1+ab|^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \prec 1 + a^2b^2 + 2ab$

Donc : $-1 \prec \dfrac{a+b}{1+ab} \prec 1 \Leftrightarrow (a^2-1)(1-b^2) \prec 0$

Donc : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[\Rightarrow -1 \prec a \prec 1$ et $-1 \prec b \prec 1$

$\Rightarrow |a| \prec 1$ et $|b| \prec 1 \Rightarrow a^2 \prec 1$ et $b^2 \prec 1 \Rightarrow a^2 - 1 \prec 0$ et $1 - b^2 \succ 0 \Rightarrow (a^2-1)(1-b^2) \prec 0$

Donc : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[\Rightarrow -1 \prec \dfrac{a+b}{1+ab} \prec 1$

Exercice7 : Démontrer en utilisant le Raisonnement par équivalences que :

$$\forall a \in \mathbb{R}; \left(|a-2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6} \right)$$

Solution : Soit : $a \in \mathbb{R}$;

$$|a-2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq a-2 \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}+2 \leq a \leq \frac{2}{3}+2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq a \leq \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4 \leq 3a \leq 8 \Leftrightarrow 6 \leq 3a+2 \leq 10$$

Donc : $|a-2| \leq \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{10} \leq \dfrac{1}{3a+2} \leq \dfrac{1}{6}$

Exercice8 : Considérons la fonction propositionnelle : $P(n) : (n \in \mathbb{N}) ; A(n) = n^2 + n + 41$

1) Calculer : $A(0); A(1); A(2)$ et $A(40)$

2) Montrer que la proposition suivante est fausse :« $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; A(n)$: est nombre premier »

Solution :1) $A(0) = 0^2 + 0 + 41 = 41$; $A(1) = 1^2 + 1 + 41 = 43$; $A(2) = 2^2 + 2 + 41 = 47$;

$A(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681$

2) La négation de:« $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; A(n)$: est nombre premier » est :

« $(\exists n \in \mathbb{N}^*) ; A(n)$: n'est pas nombre premier

$(\exists n = 40 \in \mathbb{N}^*) ; A(40) = 1681 = 41 \times 41$ n'est pas nombre premier

Donc : La négation de:« $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; A(n)$: est nombre premier » est vraie

Par suite : la proposition « $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; A(n)$ » est fausse

Exercice9 : 1) Démontrer par l'absurde que la proposition suivante est fausse : (P): "$\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}$"

2) Démontrer en utilisant un contre-exemple que la proposition suivante est fausse :
Q : « $\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}; x^2 > x$

3) Démontrer en utilisant des équivalences successives que la proposition suivante est vraie :
R : « $\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^{+})^2 ; 9x+4y \geq 12\sqrt{xy}$

4) Démontrer en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :
S : « $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7 \right)$

5) Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que :
Le nombre : $4^{2n} - 3^{2n}$ est divisible par 7 pour tout entier naturel n

Solution :1) Supposons par l'absurde que : $\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}$ est vraie

$\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 < \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{3}\times\sqrt{5} < 8$

$\Rightarrow 3+5+2\sqrt{3}\times\sqrt{5} < 8 \Rightarrow 2\sqrt{15} < 0$ Contradiction

Pa suite : la proposition : (P) : "$\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{2}$" est fausse

2) Q : « $\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}; x^2 > x$ donc : $\overline{Q}$: « $\exists x \in \mathbb{R}_{+}^{*}; x^2 \leq x$

Pour $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ nous avons : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

$\overline{Q}$: est vraie par suite : Q : est fausse

3) Démontrons en utilisant des équivalences successives que la proposition suivante est vraie :
R : « $\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^{+})^2 ; 9x+4y \geq 12\sqrt{xy}$

Soit : $(x;y) \in (\mathbb{R}^{+})^2$

$9x+4y \geq 12\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x}\right)^2 + \left(2\sqrt{y}\right)^2 - 2\times 3\sqrt{x}\times 2\sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ Proposition vraie

Par suite : R : « $\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^{+})^2 ; 9x+4y \geq 12\sqrt{xy}$ est une Proposition vraie

4) Démontrons en utilisant la contraposée que la proposition suivante est vraie :
S : « $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7 \right)$

Soit : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$; Par contraposée Montrons que : $\left(\frac{x-y}{x+y} = 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x \right)$

$$\frac{x-y}{x+y} = 7 \Rightarrow x-y = 7(x+y) \Rightarrow x-y = 7x+7y \Rightarrow -y-7y = 7x-x \Rightarrow -8y = 6x \Rightarrow y = \frac{6}{-8}x \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

Par contraposée on a donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7 \right)$

5) Montrons que : $4^{2n} - 3^{2n}$ est divisible par 7 pour tout entier naturel n
1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $4^{3n} - 4^{n} = 4^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ et 0 est divisible par 5
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^{3n} - 4^{n} = 5k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{3n+3} - 4^{n+1} = 5k'$??

$4^{3n+3} - 4^{n+1} = 4^{3} \times 4^{3n} - 4^{1} \times 4^{n} = 65 \times 4^{3n} - 4 \times 4^{n} = (65-1) \times 4^{3n} - (5-1) \times 4^{n} = 5 \times 13 \times 4^{3n} - 4^{3n} - 5 \times 4^{n} + 4^{n}$

$= 5 \times 13 \times 4^{3n} - 5 \times 4^{n} - (4^{3n} - 4^{n}) = 5 \times 13 \times 4^{3n} - 5 \times 4^{n} - 5k = 5 \times (13 \times 4^{3n} - 4^{n} - k) = 5 \times k'$ avec $k' = 13 \times 4^{3n} - 4^{n} - k \in \mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : : $\forall n \in \mathbb{N}\ 4^{3n} - 4^{n}$ est divisible par 5

Exercice10 : 1) Démontrer en utilisant le Raisonnement par implications successives que :

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; (x \succ 2 \ et \ \ y \succ 2 \Rightarrow xy \succ x + y)$

2)Démontrer en utilisant le Raisonnement par contraposée que :

$\forall x \succ 2 \ et \ \ \forall y \succ 2 \ \ : (x \neq y \Rightarrow x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1})$

Solution : 1) Soit : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$; Supposons que : $x \succ 2 \ et \ \ y \succ 2$ et montrons que : $xy \succ x + y$

$x \succ 2 \ et \ \ y \succ 2 \Rightarrow x-1 \succ 1 \ et \ \ y-1 \succ 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) \succ 1 \Rightarrow xy - x - y + 1 \succ 1 \Rightarrow xy \succ x + y$

Donc : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; (x \succ 2 \ et \ \ y \succ 2 \Rightarrow xy \succ x + y)$

2)Démontrons en utilisant le Raisonnement par contraposée que :

$\forall x \succ 2 \ et \ \ \forall y \succ 2 \ \ : (x \neq y \Rightarrow x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1})$

Soient : $x \succ 2 \ et \ \ y \succ 2$; Par contraposée

Montrons que : $x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow x = y$

$x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow (x\sqrt{y-1})^2 = (y\sqrt{x-1})^2 \ \ \Rightarrow x^2(y-1) = y^2(x-1) \ \ \Rightarrow x^2y - x^2 = y^2x - y^2$

$\Rightarrow x^2y - y^2x + y^2 - x^2 = 0 \ \Rightarrow xy(x-y) - (x-y)(x+y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(xy - (x+y)) = 0 \ \Rightarrow x - y = 0 \ ou \ xy - (x+y) = 0 \ \Rightarrow x - y = 0 \ ou \ xy = x + y$

D'après 1) $(x \succ 2 \ et \ \ y \succ 2 \Rightarrow xy \succ x + y)$ donc : $xy \succ x + y$ par suite : $xy \neq x + y$

Par conséquent : $x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow x - y = 0$

Exercice11 : Démontrer par l'absurde que : $\forall a \in \mathbb{Q}; \forall n \in \mathbb{N}^* : a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Solution : Soit $a \in \mathbb{Q} \ \ et \ n \in \mathbb{N}^*$: Montrons par l'absurde que : $a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Pour ceci, supposons que : $a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ C'est-à-dire : $a + \frac{\sqrt{2}}{2n} \in \mathbb{Q}$

On a : $a + \frac{\sqrt{2}}{2n} \in \mathbb{Q}$ et puisque $a \in \mathbb{Q}$ il en découle que : $\frac{\sqrt{2}}{2n} \in \mathbb{Q}$

Et en multipliant par rentier naturel : $2n \in \mathbb{Q}$ on- abouti a : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Résultat qui contredit le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

D'où : $\forall a \in \mathbb{Q}; \forall n \in \mathbb{N}^* : a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Exercice12 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(1) : \begin{cases} x^3 + x^2 - 2 = 0 \\ x^2 + xy - y + y^2 = 0 \end{cases}$

Solution : Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^3+x^2-2=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-1+x^2-1=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+2x+2)=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \quad ou \quad x^2+2x+2=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \quad ou \quad x^2+2x+2=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+xy-y+y^2=0 \;\; et \;\; (x=1 \quad ou \quad x^2+2x+2=0)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+xy-y+y^2=0 \;\; et\, x=1)\; ou \left(\underbrace{x^2+2x+2}_{R}=0 \quad et\, x=1 \right)$$

Donc : $S=\varnothing$

Exercice13 : Démontrer par récurrence que quel que soit l'entier naturel n :
n^3+2n est divisible par 3 .

Solution : La propriété est vraie pour n=0 :
En effet, 0 est divisible par tous les entiers non nuls.
Supposons que la propriété est vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$
C'est-à-dire montrons que si n^3+2n est divisible par 3 alors $(n+1)^3+2(n+1)$ l'est aussi

$$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=n^3+2n+3(n^2+n+1)$$

Or d'après Hypothèse de récurrence : n^3+2n est divisible par 3 .
Et comme : $n^2+n+1\in\mathbb{N}$ alors : $3(n^2+n+1)$ est aussi divisible par 3

Donc : $(n+1)^3+2(n+1)$ est divisible par 3

Donc : quel que soit l'entier naturel n : n^3+2n est divisible par 3 .

Exercice14 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2$ est un multiple de 11

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$$2^{10\times1-7}+3^{5\times1-2}-2=2^3+3^3-2^1=8+27-2=33=3\times11$$

Donc P (1) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,2^{10n-7}+3^{5n-2}-2=11k$ donc : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,2^{10n-7}=11k-3^{5n-2}+2$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,2^{10n+10-7}+3^{5n+5-2}-2=11k'$??

$$2^{10n+10-7}+3^{5n+5-2}-2=2^{10n-7}\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5=(11k-3^{5n-2}+2)\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5-2$$

$$=11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times2^{10}+2\times2^{10}+3^{5n-2}\times3^5-2\;=11k\times2^{10}+3^{5n-2}(3^5-2^{10})+2\times2^{10}-2$$

$$=11k\times2^{10}+3^{5n-2}(243-1024)+2\times1024-2\;=11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times781+2046$$

$$=11k\times2^{10}-3^{5n-2}\times11\times71+186\times11=11(k\times2^{10}-3^{5n-2}\times71+186)=11k' \text{ avec } k'=k\times2^{10}-3^{5n-2}\times71+186\in\mathbb{N}$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $2^{10n-7}+3^{5n-2}-2$ est un multiple de 11

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien