1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°13 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Logique : fonctions et applications

Les implications et les équivalences

Conditions nécessaires et condition suffisante ?

Exercice1 : Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Traduire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs puis nier les propositions :
1) la fonction f est la fonction nulle :
2) la fonction f s'annule
3) la fonction f s'annule une seule fois
4) la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}^+$
5) la fonction f ne s'annule que sur $\mathbb{R}^+$:
6) la fonction f ne prend que des valeurs strictement positives.
7) la fonction f ne prend des valeurs strictement positives que sur $\mathbb{R}^+$
8) la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$
9) la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$
10) Tout réel possède un antécédent par f
11) la fonction f prend des valeurs deux à deux distincts
12) f est positive sur $\mathbb{R}$
13) f est paire.
14)f est périodique.
15) f est majorée.
16) f possède un minimum.
17) f est strictement décroissante.
18) la fonction f s'annule au plus une fois
19) la fonction f est injective
20) la fonction f est surjective
21) la fonction f est bijective

Solution :1) la fonction f est la fonction nulle : $(\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) = 0$

2) la fonction f s'annule : $P: \ (\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) = 0$

3) la fonction f s'annule une seule fois : $P: (\exists ! x \in \mathbb{R}) / f(x) = 0$

$\overline{P}$: ne s'annule jamais ou s'annule au moins 2 fois

$\overline{P}: (\forall x \in \mathbb{R}); / f(x) \neq 0 \ ou \ \ (\exists x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) / f(x) = f(y) = 0 \ et \ \ x \neq y$

4) la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}^+ : P: \ (\exists x \in \mathbb{R}^+) / f(x) = 0$

$\overline{P}: (\forall x \in \mathbb{R}^+); / f(x) \neq 0$

5) la fonction f ne s'annule que sur $\mathbb{R}^+$: $P: (\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) = 0 \Rightarrow \ x \geq 0$

$\overline{P}: (\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) = 0 \ \ et \ \ x \prec 0$

6) la fonction f ne prend que des valeurs strictement positives : $P: \ (\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) \succ 0$;

$\overline{P}: (\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) \leq 0$

7) la fonction f ne prend des valeurs positives que sur $\mathbb{R}^+ : P: (\forall x \in \mathbb{R}) / f(x) \succ 0 \Rightarrow \ x \geq 0$

$\overline{P}: (\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) \succ 0 \ \ et \ \ x \prec 0$

8)la fonction f est constante : $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})/ f(x)=f(y)\ )$

Ou encore : $P:\ (\exists C\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})/ f(x)=C$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/ f(x)\neq f(y)\ )$ OU $\overline{P}:\ (\forall C\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R})/ f(x)\neq C$

9) la fonction f est croissante : $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})/ x\leq y\Rightarrow f(x)\leq f(y)$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R})/ x\leq y\ et\ f(x)\succ f(y)$

10) tout réel possède un antécédent par f : $P:(\forall y\in\mathbb{R});(\exists x\in\mathbb{R})/ f(x)=y$;

$\overline{P}:(\exists y\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R})/ f(x)\neq y$

11)la fonction f prend des valeurs deux à deux distincts : $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})/ x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)$

Ou encore $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})/ f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R})/ x\neq y\ et\ f(x)=f(y)$

12) f est positive : $P:\ (\forall x\in\mathbb{R})/ f(x)\geq 0$; $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})/ f(x)\prec 0$

13) f est paire : $P:\ (x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}: f(-x)=f(x))$

$\overline{P}:\exists x\in\mathbb{R}\ et -x\notin\mathbb{R}$ ou $\exists x\in\mathbb{R}: f(-x)\neq f(x)$

14) f est périodique : $\exists T\in\mathbb{R}^{+*}/ x\in\mathbb{R}\Rightarrow x+T\in\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}: f(x+T)=f(x)$

$\forall T\in\mathbb{R}^{+*}/\exists x\in\mathbb{R}\ et\ x+T\notin\mathbb{R}$ ou $\exists x\in\mathbb{R}: f(x+T)\neq f(x)$

15) f est majorée : $P:\ (\exists M\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R})/ f(x)\leq M$

$\overline{P}:\ (\forall M\in\mathbb{R});(\exists x\in\mathbb{R})/ f(x)\succ M$

16) f possède un minimum. : $P:\ (\exists a\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R})/ f(a)\leq f(x)$

$\overline{P}:\ (\forall a\in\mathbb{R});(\exists x\in\mathbb{R})/ f(a)\succ f(x)$

17) f est strictement décroissante : $(\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})/ x\prec y\Rightarrow f(x)\succ f(y)$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R})/ x\prec y\ et\ f(x)\leq f(y)$

18) la fonction f s'annule au plus une fois :$(\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})/ f(x)=f(y)=0\Rightarrow x=y$

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R})/ f(x)=f(y)=0\ et\ x\neq y$

19) la fonction f est injective

$P:(\forall x_1\in\mathbb{R});(\forall x_2\in\mathbb{R})/ x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

Ou encore $P:(\forall x_1\in\mathbb{R});(\forall x_2\in\mathbb{R})/ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

$\overline{P}:(\exists x_1\in\mathbb{R});(\exists x_2\in\mathbb{R})/ x_1\neq x_2\ et\ f(x_1)=f(x_2)$

20) la fonction f est surjective signifie que :tout réel possède un antécédent par f :

$P:(\forall y\in\mathbb{R});(\exists x\in\mathbb{R})/ f(x)=y$;

$\overline{P}:(\exists y\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R})/ f(x)\neq y$

21) la fonction f est bijective

$P:(\forall y\in\mathbb{R});(\exists! x\in\mathbb{R})/ f(x)=y$;

$\overline{P}:(\exists y\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R})/ f(x)\neq y$ ou $(\exists x_1\in\mathbb{R});(\exists x_2\in\mathbb{R})/ x_1\neq x_2\ et\ f(x_1)=f(x_2)$

Exercice2 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$

Montrer que : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Solution : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\prec x-1\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}$

On a : $f(x)-f(1)=\frac{x+2}{2x+1}-1=\frac{x+2-2x-1}{2x+1}=\frac{1-x}{2x+1}$

Donc : $|f(x)-f(1)|=\left|\frac{1-x}{2x+1}\right|=|1-x|\times\frac{1}{|2x+1|}$

Et on a : $|x-1|\prec\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}\Rightarrow 2\prec 2x+1\prec 4$

$\Rightarrow\frac{1}{4}\prec\frac{1}{|2x+1|}\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Donc : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Exercice3 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Solution : f est n'est pas pair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair si et seulement si : $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=4$ et $f(-1)=6$ donc $f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc f n'est ni pair ni impair

Exercice4 : 2) Soit f : $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=x^2+6x-7$

On considère la proposition suivante : $P\ :\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right): x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)$

1) Ecrire la négation de P

2) Calculer : $f(1)$ et $f(-7)$

3) En déduire la valeur de vérité de la proposition P

4) Ecrire la contraposé de P et donner sa valeur de vérité

Solution :1) Remarque : "$non(U\Rightarrow V)$" est "$U\ et\ non(V)$"

$\overline{P}\ :\left(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2\right): x\neq y\ \ et\ \ f(x)=f(y)$

2) $f(1)=1^2+6\times1-7=7-7=0$ et $f(-7)=(-7)^2+6\times(-7)-7=49-42-7=0$

3) On a : $f(1)=0$ et $f(-7)=0$

Donc $:\left(\exists(1;-7)\in\mathbb{R}^2\right): 1\neq-7\ \ et\ \ f(1)=f(-7)$

Donc : $\overline{P}$:est vraie

Par suite : P est une proposition fausse

4) la contraposé de P est : $:\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right): f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Puisque : P est une proposition fausse alors la contraposé de P est aussi fausse

Exercice5: On considère les assertions suivantes : $P\ :\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right): f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

1) Ecrire la négation de P

2) Soit f : $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tel que : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=x^2+2x+2$

Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(-x-2)=f(x)$

3) Est ce que : P est vraie ? justifier votre réponse

Solution :1) a) $P\ :\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right): f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Remarque : "$non(U\Rightarrow V)$" est "$U\ et\ non(V)$"

Alors : $\overline{P}:\left(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2\right)/\ f(x)=f(y)\ et\ x\neq y$

2) Montrons que : Soit : $x\in\mathbb{R}$; $f(-x-2)=(-x-2)^2+2(-x-2)+2$

$f(-x-2)=x^2+4x+4-2x-4+2=x^2+2x+2$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}): f(-x-2)=f(x)$

3) on a $-x-2\neq x$ mais $f(-x-2)=f(x)$

Par exemple : x=1 alors $-1-2\neq 1$ c'est-à-dire : $-3\neq 1$mais : $f(-3)=f(1)$

Donc : $\left(\exists(1;-3)\in\mathbb{R}^2\right)/\ f(1)=f(-3)\ et\ 1\neq -3$

C'est-à-dire : $\overline{P}$ est une assertion vraie
Par suite : P est une assertion fausse

Exercice6 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Solution : ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que :
$\forall x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\leq M$

$f(x)\leq M \Rightarrow x^2+2x\leq M \Rightarrow x^2+2x+1\leq M+1$

$\Rightarrow (x+1)^2\leq M+1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2}\leq\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow |x+1|\leq\sqrt{M+1} \Rightarrow -\sqrt{M+1}\leq x+1\leq\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow -\sqrt{M+1}-1\leq x\leq\sqrt{M+1}-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que :
$\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Exercice7 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

f "$\forall x,x'\in\mathbb{R}\quad x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$ "

f "$\forall x,x'\in\mathbb{R}\quad x\neq x'\Leftarrow f(x)\neq f(x')$ "

f "$\forall y\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)=y$ "

f "$\forall y\in[0;+\infty[;\exists x\in\mathbb{R}\quad y=f(x)$ "

Solution :

f "$\forall x,x'\in\mathbb{R}\quad x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$ "

☒"$\forall x,x'\in\mathbb{R}\quad x\neq x'\Leftarrow f(x)\neq f(x')$ "

f "$\forall y\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)=y$ "

☒"$\forall y\in[0;+\infty[;\exists x\in\mathbb{R}\quad y=f(x)$ "

Exercice8 : Soit $f:]0;+\infty[\to]0;+\infty[$ une fonction. Quelles sont les assertions vraies ?

f La négation de « $\forall x\succ 0;\exists y\succ 0\quad y\neq f(x)$ » est "$\exists x\succ 0;\exists y\succ 0\quad y=f(x)$

f La négation de « $\exists x\succ 0;\forall y\succ 0\quad y\times f(x)\succ 0$ » est "$\forall x\succ 0;\exists y\succ 0\quad y\times f(x)\prec 0$

f La négation de « $\forall x,x'\succ 0\quad x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$ » est "$\exists x,x'\succ 0\quad x=x'\ et\ f(x)\neq f(x')$

f La négation de « $\forall x,x'\succ 0\quad f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$ » est "$\exists x,x'\succ 0\quad x\neq x'\ et\ f(x)=f(x')$

Solution :

f La négation de « $\forall x\succ 0;\exists y\succ 0\quad y\neq f(x)$ » est "$\exists x\succ 0;\exists y\succ 0\quad y=f(x)$

f La négation de « $\exists x\succ 0;\forall y\succ 0\quad y\times f(x)\succ 0$ » est "$\forall x\succ 0;\exists y\succ 0\quad y\times f(x)\prec 0$

f La négation de « $\forall x, x' \succ 0 \;\; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ » est "$\exists x, x' \succ 0 \;\; x = x' \; et \; f(x) = f(x')$

☒ La négation de « $\forall x, x' \succ 0 \;\; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ » est "$\exists x, x' \succ 0 \;\; x \neq x' et \; f(x) = f(x')$

Rappels : Les expressions suivantes veulent dire la même chose :

• Si P est vraie, alors Q est vraie
• P implique Q
• P est une condition suffisante de Q
• Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie
• Q est une condition nécessaire de P
• Pour que Q soit fausse, il faut que P soit fausse
• Si Q est fausse, alors P est fausse
• P est vraie seulement si Q est vraie

Rappels : Les expressions suivantes veulent dire la même chose :

• P est équivalente à Q
• Q est équivalente à P
• P et Q sont équivalentes
• P est vraie si et seulement si Q est vraie
• P est fausse si et seulement si Q est fausse
• P est une condition nécessaire et suffisante de Q

Exercice9 :"S'il pleut, Ali prend un parapluie"
"Salah ne prend jamais de parapluie s'il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut". dir s'il pleut ou s'il ne pleut pas de ces affirmations dans les différentes situations ci-dessous ? Justifier soigneusement vos réponses en introduisant 3 propositions logiques P, Q et R.

1) Ali se promène avec un parapluie.
2)Ali se promène sans parapluie.
3) Salah se promène avec un parapluie.
4) Salah se promène sans parapluie.
5)Il ne pleut pas.
6) Il pleut.

Solution : Notons P "il pleut", Q "Ali a un parapluie" et R " Salah a un parapluie". L'énoncé nous dit que $P \Rightarrow Q$ et que $P \Leftrightarrow R$

1)Dans cette situation, on nous dit que Q est vraie. On ne peut rien conclure.

2) $\overline{Q}$ est vraie. Or, on sait (contraposée de $P \Rightarrow Q$) que ($\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$). Donc il ne pleut pas.

3) R est vraie, et R équivaut à P. Donc il pleut.

4) $\overline{R}$ est vraie et $\overline{R}$ équivaut à non p donc il ne pleut pas.

5) $\overline{P}$ est vraie et $\overline{P}$ équivaut à $\overline{R}$ donc Salah se promène sans parapluie.

6) P est vraie or $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow R$ donc Ali et Salah ont tous deux leur parapluie.

Exercice10 : On rappelle qu'un entier p divise n, et on note p/n s'il existe un entier relatif k tel que : $n = k \times p$

1) Est-ce que $6/n$ est une condition nécessaire à ce que n soit pair ?

2) Est-ce que $6/n$ est une condition suffisante à ce que n soit pair ?

Solution : Notons A la proposition "$6/n$" et B la proposition "n est pair".

Alors A⟹B. En effet, si $6/n$, alors il existe un entier k tels que $n = 6 \times k$ et donc $n = 2 \times (3k)$ est pair.

En revanche, la réciproque est fausse.
En effet, 4 est pair mais 6 ne divise pas 4. On en déduit que :

• $6/n$ n'est pas une condition nécessaire à ce que n soit pair (4 est un contre-exemple).

• $6/n$ est une condition suffisante à ce que n soit pair.

Exercice11 : Trouver des conditions nécessaires (pas forcément suffisantes) à chacune des propositions suivantes : 1) Avoir son bac
2) Le point A appartient au segment [BC].
3) Le quadrilatère ABCD est un rectangle.
Solution :1) Avoir plus que 12 en moyenne.
2) A est le milieu de [BC].
3) Les diagonales de ABCD ont même longueur et se coupent en leur milieu.
Les deux premières conditions sont des conditions suffisantes, mais non nécessaires (pourquoi ?).
En revanche, la troisième condition est une condition nécessaire et suffisante.
Exercice12 : Trouver des conditions suffisantes (pas forcément nécessaires) à chacune des propositions suivantes :1) Avoir son bac.
2)Le point A appartient au segment [BC].
3)Le quadrilatère ABCD est un rectangle.
Solution :1) Avoir passé l'examen.
2)Les points A, B et C sont alignés.
3) ABCD est un parallélogramme.
Les trois conditions précédentes sont des conditions nécessaires mais non suffisantes (pourquoi ?).
On peut en imaginer bien d'autres...
Exercice13 : Soit la proposition P : "Le quadrilatère ABCD est un rectangle" et les propositions

1)Q_1 : "Les diagonales de ABCD ont même longueur

2)Q_2 : "ABCD est un carré"

3)Q_3 : "ABCD est un parallélogramme ayant un angle droit"

4)Q_4 : "Les diagonales de ABCD sont médiatrices l'une de l'autre"

5)Q_5 : "Les diagonales de ABCD ont même milieu".
Dire si chacune des propositions Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 est pour P une condition nécessaire non suffisante, une condition suffisante non nécessaire, une condition nécessaire et suffisante, ou ni l'un ni l'autre.
Solution :1) Q_1 est une condition nécessaire non suffisante (elle le serait si on ajoutait que les diagonales ont même milieu).
2) Q_2est une condition suffisante non nécessaire (tous les rectangles ne sont pas des carrés !).
3) Q_3 est une condition nécessaire et suffisante.
4) Q_4 n'est ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante (Q4 caractérise les losanges).
5) Q_5 est une condition nécessaire non suffisante (elle le serait si on ajoutait que les diagonales ont même longueur).
Exercice14 : Parmi toutes les propositions suivantes, regrouper par paquets celles qui sont équivalentes
1) Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
2) Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement.
3) Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
4) Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
5) Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
6) Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.
7) Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.
8) Travail régulier implique réussite à l'examen.
9)On ne peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement
Solution : Notons P la proposition "Avoir son examen" et P la proposition "Travailler régulièrement". Nous allons écrire les propositions sous la forme $P \Rightarrow Q$ ou $Q \Rightarrow P$.

1)La proposition est clairement $Q \Rightarrow P$.

2)La proposition est $P \Rightarrow Q$.

3)La proposition est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. C'est une proposition équivalente à sa contraposée, $P \Rightarrow Q$.

4)Même signification que 2., $P \Rightarrow Q$

5)Cette fois, on a $Q \Rightarrow P$

6)La proposition est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ qui est équivalente à $P \Rightarrow Q$

7)Cette fois, on a $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ qui est équivalente à $Q \Rightarrow P$

8)Tout simplement, $Q \Rightarrow P$

9)C'est la même chose que 2, à savoir $P \Rightarrow Q$

Les propositions 1, 5, 7 et 8 sont donc équivalentes, et les proposition 2, 3, 4, 6 et 9 le sont également.

Exercice15 : Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie :
$"\left(\forall y \in [0,1]\right) : x \geq y \Rightarrow x \geq 2y"$

Solution : On sépare en 4 cas :

1) $x \geq 2$ Alors, pour tous $y \in [0,1]$ les propositions $x \geq y$ *et* $x \geq 2y$ sont vraies. D'après la table de vérité de l'implication, l'assertion est vraie.

2) $x \prec 0$. Alors, pour tous $y \in [0,1]$ les propositions $x \geq y$ *et* $x \geq 2y$ sont fausses. D'après la table de vérité de l'implication, l'assertion est vraie.

3) $x \in \left]0,2\right]$ On peut alors trouver un réel $y \in [0,1]$ tel que $2y \succ x$ *et* $x \geq y$.

En effet, $\frac{x}{2} \in \left]0,1\right[$ et il suffit de choisir : $\frac{x}{2} \prec y \prec \min(1; x)$

Dans ce cas, $x \geq y$ est vraie et $x \geq 2y$ est fausse. L'assertion est fausse.

4) Si x=0, alors les assertions $x \geq y$ et $x \geq 2y$ sont ou bien simultanément fausses (lorsque $y \in \left]0,1\right]$), ou bien simultanément vraies. L'assertion est donc vraie.

Exercice 16 : Trois personnes, Ali (A), Belaid (B) et Chérif (C) exercent chacune une profession Différente : pharmacien, dentiste ou chirurgien.

Sachant que les implications suivantes sont vraies, retrouver leur profession :

α :(A chirurgien $\Rightarrow$ B dentiste),

β :(A dentiste $\Rightarrow$ B pharmacien),

γ : (B non chirurgien $\Rightarrow$ C dentiste).

Solution :α, β et γ sont vraies simultanément et A, B, C ont chacun une profession différente parmi pharmacien, dentiste et chirurgien.

- Si A : est chirurgien alors d'après α : B est dentiste donc B non chirurgien est vraie ce qui implique
C : est dentiste d'après γ $\Rightarrow$contradiction car B et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.
- Si A est dentiste alors d'après β : B est pharmacien donc B non chirurgien est vraie ce qui implique
C :est dentiste d'après γ : $\Rightarrow$contradiction car A et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.
D'où : A est pharmacien.
- Si B est dentiste alors B non chirurgien est vraie donc d'après γ : C est dentiste ce qui implique une
Contradiction car B et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.
D'où : B est chirurgien.

Conclusion : A :est pharmacien, B :est chirurgien, C :est dentiste.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien