1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°12 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P_1 : "$\left(\cos\frac{6\pi}{5} \prec 0\right)$ $et\left(\left|2\sqrt{3}-5\right| = 5-2\sqrt{3}\right)$"

2) P_2 : "$(0=1)$ $ou(-1\prec 0)$"

3) P_3 : "$\left(\frac{123}{3}\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\notin[0,1]\right)$"

4) P_4 : "$\left(\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\right)\Leftrightarrow\left(1\in[0,1[\right)$"

Solution : 1) P_1 : "$\left(\cos\frac{6\pi}{5} \prec 0\right)$ $et\left(\left|2\sqrt{3}-5\right| = 5-2\sqrt{3}\right)$"

P_1 : est vraie car $\left(\cos\frac{6\pi}{5}\prec 0\right)$ vraie et $\left(\left|2\sqrt{3}-5\right|=5-2\sqrt{3}\right)$ vraie ($\frac{6\pi}{5}\in\left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ et $2\sqrt{3}-5\prec 0$)

$\overline{P_1}$: "$\left(\cos\frac{6\pi}{5}\geq 0\right)$ $ou\left(\left|2\sqrt{3}-5\right|\neq 5-2\sqrt{3}\right)$"

2) P_2 : " $(3\ divise\ 1258)$ ou $(\cos 0=1)$ "

P_2 : est vraie car $(3\ divise\ 1258)$ est fausse et $(\cos 0 = 1)$ est vraie

$\overline{P_2}$: "$(3\ ne\,divise\ \ pas\ 1258)$ $et(\cos 0\neq 1)$"

3) P_3 : "$\left(\frac{123}{3}\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\notin[0,1]\right)$"

P_3 : est fausse car $\frac{123}{3}\in\mathbb{N}$ est vraie et $\frac{1}{2}\notin[0,1]$ est fausse

$\overline{P_3}$: "$\left(\frac{123}{3}\in\mathbb{N}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}\in[0,1]\right)$"

Car : non"$p\Rightarrow q$" est "$p\ et\ \overline{q}$"

4) P_4 : "$\left(\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\right)\Leftrightarrow\left(1\in[0,1[\right)$"

P_4 : est vraie car $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ est fausse et $\left(1\in[0,1[\right)$ est fausse aussi

$\overline{P_4}$: "$\left(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\right)\Leftrightarrow\left(1\in[0,1[\right)$"

Car : non"$p\Leftrightarrow q$" est "$\overline{p}\Leftrightarrow q$"

Exercice2 : On considère la proposition : $P:\left(\forall x\in[1;+\infty[\right): x^2\geq 1\ \ et\, x^2+2x-3\geq 0$

1) Nier la proposition P .

2) Montrer que P est vraie.

Solution :1) $\overline{P}:\left(\exists x\in[1;+\infty[\right): x^2\prec 1$ ou $x^2+2x-3\prec 0$

2) Montrons que P est vraie.

Soit : $x\in[1;+\infty[$

- $x\in[1;+\infty[\ \Rightarrow x\geq 1\Rightarrow x^2\geq 1^2\Rightarrow x^2\geq 1$
- $Pour\ x^2+2x-3:$ $\Delta=4+12=16\succ 0$: deux racines : $x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=\frac{-2+4}{2}=1$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=\frac{-2-4}{2}=-3$

Le tableau de signe donne :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $x \in [1;+\infty[$ alors : $x^2+2x-3 \geq 0$

Par suite : $P:(\forall x \in [1;+\infty[):x^2 \geq 1 \ et \ x^2+2x-3 \geq 0$

Exercice3 : On considère la suivante : $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}):2x^2+xy+y^2=0$

1) Ecrire la négation de P
2) Déterminer la valeur de vérité de P

Solution :1) $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}):2x^2+xy+y^2 \neq 0$

2) Déterminons la valeur de vérité de P

$\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}):2x^2+xy+y^2 \neq 0$

$2x^2+xy+y^2 = y^2+xy+2x^2 = ay^2+by+c$

On a : $\Delta = x^2-8x^2=-7x^2$

Si $\Delta \prec 0$ alors ; $2x^2+xy+y^2 \succ 0$ donc : $2x^2+xy+y^2 \neq 0$

En posant : $x=1$ on aura : $\Delta=-7 \prec 0$

Donc : $(\exists x = 1 \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}):2+y+y^2 \neq 0$

Donc La proposition $\overline{P}$: est vraie donc P est fausse

Exercice4 : Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les symboles logiques et les quantificateurs

1)Le carré de tout réel est positif.
2) il existe des réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.
3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5) Il existe un entier multiple de tous les autres.
6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :1) "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0$"

2) "$\exists x \in \mathbb{R}, x \succ x^2$ "

3) $(\forall n \in \mathbb{N});(\exists m \in \mathbb{N}):n \prec m$

4) $(\exists x \in \mathbb{R}):(\forall n \in \mathbb{Z});(\forall m \in \mathbb{N}^*):x \neq \frac{n}{m}$

5) $(\exists n \in \mathbb{N});(\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}):n = m \times k$

6) $(\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}) / x \prec y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} / x \prec z \prec y$

Exercice5 : 1°) Soit P désignant la proposition « l'enfant sait lire » et Q désignant la proposition « L'enfant sait écrire ».

Donner la traduction dans le langage courant des propositions suivantes :

(1) $P \wedge Q$. (2) $P \wedge \overline{Q}$. (3) $P \Rightarrow Q$. (4) $\overline{P} \vee \overline{Q}$. (5) $\overline{P} \wedge \overline{Q}$.

2°) Même question avec P la proposition « l'homme est mortel » et Q désignant la proposition « L'homme est éternel » et les propositions :

(1) $P \vee Q$. (2) $\overline{P} \vee \overline{Q}$. (3) $\overline{P \wedge Q}$. (4) $P \wedge \overline{Q}$. (5). $P \Rightarrow \overline{Q}$

Solution : 1°) (1) L'enfant sait lire et écrire
(2) l'enfant sait lire mais il ne sait pas écrire
(3) si l'enfant sait écrire alors il sait lire
(4) l'enfant ne sait pas lire ou il ne sait pas écrire
(5) l'enfant ne sait pas lire et il ne sait pas écrire

2°)(1) L'Homme est mortel ou éternel
(2) l'Homme n'est pas mortel, ou il n'est pas éternel

(3) il est faux que « l'Homme est mortel et éternel »
(4) l'Homme est mortel mais pas éternel
(5) si l'Homme est mortel alors il n'est pas éternel

Exercice6 : 1) Donnez la négation de la proposition suivante

$(\forall \varepsilon \succ 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})\left[N \geq p\, et\, p \geq 0 \Rightarrow \left|U_{n+p} - U_p\right| \prec \varepsilon\right]$

2) Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante :

$(\forall \varepsilon \succ 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})\left[N \geq p\, et\, p \geq 0 \Rightarrow \left|U_{n+p} - U_p\right| \prec \varepsilon\right]$

Solution : 1) La négation de la proposition est :

$(\exists \varepsilon \succ 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})\left[N \geq p\, et\, p \geq 0 \;\; et \;\; \left|U_{n+p} - U_p\right| \geq \varepsilon\right]$

2) La contraposée de la phrase mathématique est :

$(\forall \varepsilon \succ 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})\left[\left|U_{n+p} - U_p\right| \geq \varepsilon \Rightarrow N \prec p\, ou\, p \prec 0\right]$

Exercice7 : Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant puis donner sa négation :

1) $P: (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): x + y \succ 0$

2) $P: (\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}): x + y \succ 0$

3) $P: (\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): x + y \succ 0$

4) $P: (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): y^2 \succ x$

Solution :1) $P: (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): x + y \succ 0$

$\overline{P}\; (\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}): x + y \leq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $x + y \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -x$

$(\exists y = -x - 1 \in \mathbb{R}): x + y = -1 \leq 0$ Donc $\overline{P}$ est vraie

Par suite : P:est fausse

2) $P: (\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}): x + y \succ 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $(\exists y = -x + 1 \in \mathbb{R}): x + y = 1 \succ 0$

Par suite : P:est vraie

$\overline{P}\; (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): x + y \leq 0$

3) $P: (\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): x + y \succ 0$

$\overline{P}\; (\exists x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}): x + y \leq 0$

$\overline{P}$ est vraie car par exemple : $x = -1 \; et \; y = 0$ et $x + y \leq 0$

P:est donc fausse

4) $P: (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): y^2 \succ x$

Oui P:est vraie par exemple : $(\exists x = -1 \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): y^2 \succ -1$

$\overline{P}: (\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}): y^2 \leq x$

Exercice8 : On considère trois nombres réels : x ; y et z tels que : un seulement des trois est strictement positif et le deuxième est nul et le dernier qui reste est strictement négatif et les trois réels vérifient les implications suivantes :

$\boxed{1}$ "$x = 0 \Rightarrow y \succ 0$"

$\boxed{2}$ "$x \succ 0 \Rightarrow y \prec 0$"

$\boxed{3}$ "$y \neq 0 \Rightarrow z \succ 0$"

Déterminer lequel des trois réels le nul et le strictement positif et le strictement négatif

Solution : Par exemple :

- On suppose que : $x=0$: d'après : $\boxed{1} \Rightarrow "y \succ 0" \Rightarrow "y \neq 0"$

et d'après : $\boxed{3} \Rightarrow "y \succ 0" \Rightarrow "z \succ 0"$ donc contradiction avec les données de l'exercice qui dit « un seulement des trois est strictement positif »
Donc : $x \neq 0$

- On suppose que : $x \succ 0$: d'après : $\boxed{2} \Rightarrow "y \prec 0" \Rightarrow "y \neq 0"$: d'après : $\boxed{3} \Rightarrow "z \succ 0"$

On a donc : $x \succ 0$ et $z \succ 0$ impossible « un seulement des trois est strictement positif »
il reste donc : $x \prec 0$ qui est vraie

- On suppose que : $y \succ 0$: donc : $y \neq 0$ d'après : $\boxed{3} \Rightarrow "z \succ 0"$

On a donc : $y \succ 0$ et $z \succ 0$ impossible « un seulement des trois est strictement positif »
par suite : $y \leq 0$ c'est-à-dire : $y = 0$ ou $y \prec 0$ et comme $x \prec 0$ donc impossible d'avoir $y \prec 0$ « un seulement des trois est strictement négatif » donc : $\boxed{x \prec 0}$ et $\boxed{y = 0}$ et il reste donc : $\boxed{z \succ 0}$

Exercice9 : Montrer que : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) : \forall \alpha \succ 0 : \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| \prec \alpha \Rightarrow |x| \prec \alpha \ et |y| \prec \alpha$

Solution : Soient $(x;y) \in \mathbb{R}^2$; $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$

On suppose que : $\left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| \prec \alpha$ et on a : $\left|\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right| \leq \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right|$

C'est-à-dire : $|x| \leq \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right|$ et on a : $\left|\frac{x+y}{2} + \left(-\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right|$

C'est-à-dire : $|y| \leq \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right|$

Donc : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) : \forall \alpha \succ 0 : \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| \prec \alpha \Rightarrow |x| \prec \alpha \ et |y| \prec \alpha$

Exercice10 : 1) a) Montrer que : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{*2}\right) : \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

b) Déduire que : $\left(\forall (a;b;c) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3\right) : \frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{a+c}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

2) Montrer que la proposition : « $\left(\forall (n;m) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2\right) : \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{n+m} \in \mathbb{N}$ » est fausse

Solution : : 1) a) Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^{*2}$

$$\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{y} = \frac{x^2 - y^2}{xy^2} + \frac{y^2 - x^2}{x^2 y} = \frac{x^2 - y^2}{xy}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{(x-y)(x+y)}{xy}\left(\frac{x-y}{xy}\right) = \frac{(x-y)^2 (x+y)}{(xy)^2} \geq 0 \text{ car : } (x;y) \in \mathbb{R}^{*2}$$

Donc : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{*2}\right) : \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

b) Déduisons que : $\left(\forall (a;b;c) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3\right) : \frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{a+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Soit $(a;b;c) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{a+c}{b^2} = \left(\frac{a}{c^2} + \frac{c}{a^2}\right) + \left(\frac{b}{c^2} + \frac{c}{b^2}\right) + \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right)$$

D'après 1) a) on a : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}\right):\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

Donc : $\frac{a}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ ❶ et $\frac{b}{c^2}+\frac{c}{b^2}\geq\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ❷ et $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ❸

La somme des inégalités ❶et❷ et❸ membre a membre donnent :

$\left(\frac{a}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)+\left(\frac{b}{c^2}+\frac{c}{b^2}\right)+\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

c'est-à-dire : $\left(\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3\right):\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{a+c}{b^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

2) La négation de cette proposition : « $\left(\exists(n;m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..+\frac{1}{n+m}\notin\mathbb{N}$ » est vraie

$\left(\exists(n=1;m=1)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\frac{1}{1}+\frac{1}{1+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\notin\mathbb{N}$

Par suite : la proposition : « $\left(\forall(n;m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..+\frac{1}{n+m}\in\mathbb{N}$ » est fausse

Exercice11 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq 0 \ ou \ y\neq 0\Rightarrow x^2+y^2+xy\neq 0$

Solution : Montrons l'implication en raisonnant par contraposition :

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: Montrons que : $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow x=0 \ et \ y=0$

Supposons : $x^2+y^2+xy=0$ et Montrons que : $x=y=0$

On a : $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+xy+xy=xy\\x^2+y^2+xy-xy=-xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2xy=xy\\x^2+y^2=-xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+y)^2=xy\\x^2+y^2=-xy\end{cases}$

Or : $(x+y)^2\geq 0$ et $x^2+y^2\geq 0$

Donc : $xy\geq 0 \ et \ xy\leq 0$ par suite : $xy=0$

Donc : $x^2+y^2=0$ Donc : $x^2=-y^2$

Or : $x^2\geq 0$ et puisque $x^2=-y^2$ on a aussi : $x^2\leq 0$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2\geq 0\\x^2\leq 0\end{cases}\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$ et comme : $x^2+y^2=0$ alors : $y^2=0$ c'est-à-dire : $y=0$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$: $x^2+y^2+xy=0\Rightarrow x=y=0$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R};\forall y\in\mathbb{R}$ $x^2+y^2+xy=0\Leftrightarrow x=y=0$

Finalement : par contraposition : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq 0 \ ou \ y\neq 0\Rightarrow x^2+y^2+xy\neq 0$

Exercice12 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ considérons : $P(n)=n^2+7n+12$

Montrer qu'il n'existe pas de n tel que : $\sqrt{P(n)}\in\mathbb{N}$

Solution : ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{P(n)}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n^2+7n+12}=m$

$\sqrt{n^2+7n+12}=m\Leftrightarrow n^2+7n+12=m^2\Leftrightarrow n^2+6n+9+n+3=m^2\Leftrightarrow(n+3)^2+n+3=m^2$

et donc : $(n+3)^2\prec m^2$ et comme : $(n+4)^2=n^2+8n+16$

Alors : $(n+4)^2-m^2=\left(n^2+8n+16\right)-\left(n^2+7n+12\right)=n+4\succ 0$

On a alors : $(n+3)^2\prec m^2\prec(n+4)^2$ c'est-à-dire : $n+3\prec m\prec(n+3)+1$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $n+3 \ et \ n+4$

Ceci signifie : qu'il n'existe pas de n tel que : $\sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$

Exercice13 : Soient : $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}^*$; $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

1) Montrer que : $ax+by=1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2$

2) Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2\right): a^2=b+1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

3) Soient : $a;b \ et \, c$ des réels.

a) Vérifier que : $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

b) Montrer que : $|ab| \succ \frac{c^2}{2} \Rightarrow |a-b| \succ c \ ou \ |a+b| \succ c$

4) Montrer que : $\left(\forall(x;y)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2\right): y \neq \frac{-3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$

5) n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair. Montrer que : $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$

Solution : Soient : : $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}^*$; $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

1) Montrons que : $ax+by=1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2$

$$\frac{1}{x^2+y^2}-\left(a^2+b^2\right)=\frac{1-\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)}{x^2+y^2}=\frac{1-\left(a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2\right)}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1-\left(a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2}=\frac{1-\left((ax+by)^2-2axby+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2}=\frac{1-\left(1-2axby+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2}=\frac{1-1+2axby-a^2y^2-b^2x^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{-\left(a^2y^2-2axby+b^2x^2\right)}{x^2+y^2}=\frac{-(ay-bx)^2}{x^2+y^2}$$

Donc : $\frac{1}{x^2+y^2}-\left(a^2+b^2\right)\leq 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2$: d'où : $ax+by=1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2$

2) Soit : $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$: Montrons que : $a^2=b+1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

$$a^2=b+1 \Rightarrow a^2-b=1 \Rightarrow \left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)=1 \Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}}=1 \Rightarrow 2\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}}=2$$

$$\Rightarrow 2a+2\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}}-2a=2 \Rightarrow a+\sqrt{b}+2\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}}+\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{2(a+1)}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{2(a+1)}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{2(a+1)} \Rightarrow \frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$$

Donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2\right): a^2=b+1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

3) Soient : $a;b \ et \, c$ des réels.

a) Vérifions que : $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$:

Soit : $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: $(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2=4ab$

b) Montrons que : $|ab| \succ \frac{c^2}{2} \Rightarrow |a-b| \succ c \ ou \ |a+b| \succ c$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Il suffit de montrer que : $|a-b|\le c$ *et* $|a+b|\le c \Rightarrow |ab|\le \frac{c^2}{2}$

On suppose que : $|a-b|\le c$ *et* $|a+b|\le c$ et on montre que $|ab|\le \frac{c^2}{2}$??

On a : $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ donc :

$|4ab|=\left|(a+b)^2-(a-b)^2\right|\le\left|(a+b)^2\right|+\left|(a-b)^2\right|$

Et comme : $|a+b|^2\le c^2$ et $|a-b|^2\le c^2$ alors $|4ab|\le 2c^2$ Par suite : $|ab|\le\frac{c^2}{2}$

Par contraposition ceci équivalent à : $|ab|\succ\frac{c^2}{2}\Rightarrow|a-b|\succ c$ *ou* $|a+b|\succ c$

4) Utilisons un Raisonnement par contraposition : Soit : $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$

L'assertion : $y\ne\frac{-3}{4}x\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}\ne7$ est équivalente à : $\frac{x-y}{x+y}=7\Rightarrow y=\frac{-3}{4}x$

On a : $\frac{x-y}{x+y}=7\Rightarrow x-y=7(x+y)\Rightarrow -y-7y=-x+7x\Rightarrow -8y=6x\Rightarrow y=-\frac{6}{8}x\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x$

Par contraposition ceci équivalent à : $y\ne\frac{-3}{4}x\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}\ne7$

5) Soient : n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $\frac{n}{m}\in\mathbb{N}$ c'est-à-dire : $\exists p\in\mathbb{N}/\frac{n}{m}=p$ alors : $n=m\times p$

Ce qui est contradictoire puisque n est impair et $m\times p$ est pair.

Donc : $\frac{n}{m}\notin\mathbb{N}$

Exercice14 : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

1) Si n est non divisible par 3 alors n^2-1 est divisible par 3

2) Déduire que : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^2$; $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

Solution :1) Soit $n\in\mathbb{N}$ avec n non divisible par 3

Il y'a deux façons d'écrire n : $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec : $k\in\mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n=3k+1$: $n^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=9k^2+6k=3\left(3k^2+2k\right)=3k'$ avec :

$k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2-1 est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n=3k+2$

$n^2-1=(3k+2)^2-1=9k^2+12k+4-1=9k^2+12k+3=3\left(3k^2+4k+1\right)=3k'$

Avec : $k'=3k^2+4k+1\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : n^2-1 est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas le nombre n^2-1 est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que n est non divisible par 3

2) Soit $(a;b)\in\mathbb{N}^2$: $ab\left(a^2-b^2\right)=ab\left(a^2-1+1-b^2\right)=ab\left(\left(a^2-1\right)-\left(b^2-1\right)\right)$

1ére cas : si a est divisible par 3 ou b est divisible par 3

Alors : ab est divisible par 3 et par suite : $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

2ére cas : a n'est pas divisible par 3 ou b n'est pas divisible par 3

D'après 1) : a^2-1 est divisible par 3 et b^2-1 est divisible par 3

$(\exists k\in\mathbb{N});(\exists k'\in\mathbb{N})$ tels que : $a^2-1=3k$ et $b^2-1=3k'$

$ab\left(\left(a^2-1\right)-\left(b^2-1\right)\right)=ab\left(3k-3k'\right)=3ab\left(k-k'\right)=3k''$ Avec : $k'=ab\left(k-k'\right)\in\mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas : $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^2$; $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

Exercice15 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $3\times5^{2\times0+1}+2^{3\times0+1}=3\times5+2^1=15+2=17$ et 17est un multiple de 17 ; Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}=17k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,3\times5^{2n+3}+2^{3n+4}=7k'$??

$3\times5^{2n+3}+2^{3n+4}=3\times5^2\times5^{2n+1}+2^3\times2^{3n+1}=3(17+8)\times5^{2n+1}+8\times2^{3n+1}=3\times17\times5^{2n+1}+3\times8\times5^{2n+1}+8\times2^{3n+1}$

$=3\times17\times5^{2n+1}+8\left(3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}\right)=3\times17\times5^{2n+1}+8\times17k=17\times\left(3\times5^{2n+1}+8k\right)=17k'$ avec $k'=3\times5^{2n+1}+8k\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

Exercice16 : Montrer que : P (n) « $\forall n\in\mathbb{N}$; n^5-n est divisible par 5 »

Solution : Montrons $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,n^5-n=5k$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $0^5-0=0$ est un multiple de 5

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,n^5-n=5k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,(n+1)^5-(n+1)=5k'$??

$(n+1)^5-(n+1)=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-(n+1)$

$(n+1)^5-(n+1)=n^5-n+5\left(n^4+2n^3+2n^2+n\right)=5k+5\left(n^4+2n^3+2n^2+n\right)=5\left(k+n^4+2n^3+2n^2+n\right)=5k'$

Avec $k'=k+n^4+2n^3+2n^2+n$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : « $\forall n\in\mathbb{N}$; n^5-n est divisible par 5 »

Exercice17 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on pose a_n le nombre formé de n nombres égaux à 7

(C'est-à-dire : $a_n=\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}$ par exemple : $a_1=7$ et $a_2=77$; $a_4=7777$)

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$.

Solution : notons P(n) La proposition " $a_n=\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $a_1=7$ et $\frac{7}{9}\left(10^1-1\right)=7$ donc $7=7$.

Donc : P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $a_n = \frac{7}{9}\left(10^n - 1\right)$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $a_{n+1} = \frac{7}{9}\left(10^{n+1} - 1\right)$??

On a : $a_{n+1} = 7\times 10^n + \underbrace{77.....7}_{n\ fois 7} = 7\times 10^n + a_n$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $a_n = \frac{7}{9}\left(10^n - 1\right)$

Donc $a_{n+1} = 7\times 10^n + \frac{7}{9}\left(10^n - 1\right) = \frac{7}{9}\left(9\times 10^n + 10^n - 1\right) = \frac{7}{9}\left(10\times 10^n - 1\right) = \frac{7}{9}\left(10^{n+1} - 1\right)$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{7}{9}\left(10^n - 1\right)$.

Exercice18 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ On pose : $U_n = (n+1)(n+2)(n+3)\times\ldots\times(n+n)$

et $V_n = 2^n \times 1\times 3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n-1)$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = V_n$

Solution :1) a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = V_n$

1étapes : l'initialisation : Pour n =1 nous avons : $U_1 = 1+1 = 2$ et $V_1 = 2^1 \times 1 = 2$

C'est-à-dire : $U_1 = V_1$

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $U_n = V_n$

Montrons alors que : $U_{n+1} = V_{n+1}$ c'est-à-dire montrons :

$$\left((n+1)+1\right)\left((n+1)+2\right)\left((n+1)+3\right)\times\ldots\times\left((n+1)+n\right)\times\left((n+1)+n+1\right) = 2^{n+1}\times 1\times 3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n-1)\times(2n)\times(2n+1)$$

$$U_{n+1} = (n+2)(n+3)(n+4)\times\ldots\times(2n)\times(2n+1)\times(2n+2)$$

$$U_{n+1} = 2U_n\times(2n+1) = 2V_n\times(2n+1)$$

$$U_{n+1} = 2\times 2^n\times 1\times 3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n-1)\times(2n+1)$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = V_n$

Exercice19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{|x-3|} \le x-1$

Solution : On va Opérer par disjonction de cas :

On remarque tout d'abord que sur :] −∞ ; 1[, x − 1 < 0 donc il n'y a pas de solution sur cet intervalle puisque : $\sqrt{|x-3|} \le x-1$

On cherche donc uniquement des solutions sur l'intervalle [1 ; +∞[.

Sur cet intervalle, les deux membres sont positifs, et donc on peut utiliser la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{|x-3|} \le x-1 \Leftrightarrow |x-3| \le (x-1)^2 \Leftrightarrow |x-3| \le x^2 - 2x + 1$

Comme $x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$ on est naturellement amené à résoudre sur deux intervalles différents pour faire Disparaître la valeur absolue :

• Sur [1 ; 3[: $|x-3| \le x^2 - 2x + 1$ Equivaut à : $-(x-3) \le x^2 - 2x + 1$

Equivaut à : $-x + 3 \le x^2 - 2x + 1$

Equivaut à : $0 \le x^2 - 2x - 2$

On calcule le discriminant du polynôme $x^2 - 2x - 2$: Δ = 9 > 0 donc $x^2 - 2x - 2$ admet deux racines Distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or, on a restreint l’étude à l’intervalle [1 ; 3[, donc on ne retient que les x ∈ [2 ; 3[.

• Sur [3 ; +∞ [: $|x-3| \leq x^2 - 2x + 1$ Equivaut à : $x - 3 \leq x^2 - 2x + 1$

Equivaut à : $0 \leq x^2 - 3x + 4$

On calcule le discriminant du polynôme $x^2 - 3x + 4$: Δ = −7 < 0.

Donc ; le signe de $x^2 - 3x + 4$ est du signe de $a = 1$

Donc : $x^2 - 3x + 4 > 0$

Donc, tous les x ∈ [3 ; +∞ [sont solutions de l’inéquation étudiée sur l’intervalle [3 ; +∞ [.

Au final, S = [2 ; 3[∪ [3 ; +∞ [= [2 ; +∞ [.

C’est en forgeant que l’on devient forgeron : Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien