1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Série N°12 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/)

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P_1 : "$\left(\cos\frac{6\pi}{5} \prec 0\right)$ et $\left(\left|2\sqrt{3}-5\right| = 5-2\sqrt{3}\right)$"

2) P_2 : "$(0=1)$ ou $(-1\prec 0)$"

3) P_3 : "$\left(\frac{123}{3}\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\notin[0,1]\right)$"

4) P_4 : "$\left(\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\right)\Leftrightarrow\left(1\in[0,1[\right)$"

Exercice2 : On considère la proposition : $P:\left(\forall x\in[1;+\infty[\right): x^2\geq 1\ et\ x^2+2x-3\geq 0$

1) Nier la proposition P .
2) Montrer que P est vraie.

Exercice3 : On considère la suivante : $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{R}\right): 2x^2+xy+y^2=0$

1) Ecrire la négation de P
2) Déterminer la valeur de vérité de P

Exercice4 : Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les symboles logiques et les quantificateurs
1)Le carré de tout réel est positif.
2) il existe des réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.
3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5) Il existe un entier multiple de tous les autres.
6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice5 : 1°) Soit P désignant la proposition « l'enfant sait lire » et Q désignant la proposition « L'enfant sait écrire ».
Donner la traduction dans le langage courant des propositions suivantes :
(1) $P\wedge Q$. (2) $P\wedge\overline{Q}$. (3) $P\Rightarrow Q$. (4) $\overline{P}\vee\overline{Q}$. (5) $\overline{P}\wedge\overline{Q}$.

2°) Même question avec P la proposition « l'homme est mortel » et Q désignant la proposition « L'homme est éternel » et les propositions :
(1) $P\vee Q$. (2) $\overline{P}\vee\overline{Q}$. (3) $\overline{P\wedge Q}$. (4) $P\wedge\overline{Q}$. (5). $P\Rightarrow\overline{Q}$

Exercice6 : 1) Donnez la négation de la proposition suivante
$\left(\forall\varepsilon\succ 0\right)\left(\exists N\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(\forall p\in\mathbb{N}\right)\left[N\geq p\ et\ p\geq 0\Rightarrow\left|U_{n+p}-U_p\right|\prec\varepsilon\right]$

2) Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante :
$\left(\forall\varepsilon\succ 0\right)\left(\exists N\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(\forall p\in\mathbb{N}\right)\left[N\geq p\ et\ p\geq 0\Rightarrow\left|U_{n+p}-U_p\right|\prec\varepsilon\right]$

Exercice7 : Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant puis donner sa négation :1) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right): x+y\succ 0$ 2) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right): x+y\succ 0$

3) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right): x+y\succ 0$ 4) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right): y^2\succ x$

Exercice8 : On considère trois nombres réels : x ; y et z tels que : un seulement des trois est strictement positif et le deuxième est nul et le dernier qui reste est strictement négatif et les trois réels vérifient les implications suivantes :
$\boxed{1}$ "$x=0\Rightarrow y\succ 0$" ; $\boxed{2}$ "$x\succ 0\Rightarrow y\prec 0$" ; $\boxed{3}$ "$y\neq 0\Rightarrow z\succ 0$"
Déterminer lequel des trois réels le nul et le strictement positif et le strictement négatif

Exercice9 : Montrer que : $\left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\right):\forall\alpha\succ 0:\left|\frac{x+y}{2}\right|+\left|\frac{x-y}{2}\right|\prec\alpha\Rightarrow|x|\prec\alpha\ et\,|y|\prec\alpha$

Exercice10 : 1) a) Montrer que : $\left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^{*2}\right):\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

b) Déduire que : $\left(\forall (a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3\right):\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{a+c}{b^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

2) Montrer que la proposition : « $\left(\forall (n;m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right):\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..+\frac{1}{n+m}\in\mathbb{N}$ » est fausse

Exercice11 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\forall y\in\mathbb{R}$: $x\neq 0\ \ ou\ \ y\neq 0\Rightarrow x^2+y^2+xy\neq 0$

Exercice12 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ considérons : $P(n)=n^2+7n+12$

Montrer qu'il n'existe pas de n tel que : $\sqrt{P(n)}\in\mathbb{N}$

Exercice13 : Soient : $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}^*$; $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}^*$

1) Montrer que : $ax+by=1\Rightarrow\frac{1}{x^2+y^2}\leq a^2+b^2$

2) Montrer que : $\left(\forall (a;b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2\right):a^2=b+1\Rightarrow\frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}}=1$

3) Soient : $a\,;b\ et\,c$ des réels.

a) Vérifier que : $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

b) Montrer que : $|ab|\succ\frac{c^2}{2}\Rightarrow|a-b|\succ c\ \ ou\ |a+b|\succ c$

4) Montrer que : $\left(\forall (x;y)\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2\right):y\neq\frac{-3}{4}x\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}\neq 7$

5) n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair. Montrer que : $\frac{n}{m}\notin\mathbb{N}$

Exercice14 : Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

1) Si n est non divisible par 3 alors n^2-1 est divisible par 3

2) Déduire que : $\forall (a;b)\in\mathbb{N}^2$; $ab\left(a^2-b^2\right)$ est divisible par 3

Exercice15 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

Exercice16 : Montrer que : P (n) « $\forall n\in\mathbb{N}$; n^5-n est divisible par 5 »

Exercice17 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on pose a_n le nombre formé de n nombres égaux à 7

(C'est-à-dire : $a_n=\underbrace{77.....7}_{n\ fois\ 7}$ par exemple : $a_1=7$ et $a_2=77$; $a_4=7777$)

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$.

Exercice18 : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ On pose : $U_n=(n+1)(n+2)(n+3)\times\ldots\times(n+n)$

et $V_n=2^n\times 1\times 3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n-1)$

Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $U_n=V_n$

Exercice19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{|x-3|}\leq x-1$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien