1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°11 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?
1) Si Marrakech et en France alors 3 − 2 = 2 ;
2) Soit Marrakech et en France, soit les grenouilles aboient ;
3) Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes ;
4) Si l'homme est un quadrupède, alors il parle ;
5) Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs ;
6. Marrakech est au Maroc ou Madrid est en chine.
Solution :1) Il s'agit, ici d'une implication.
« Marrakech et en France » est faux et « 3−2 = 2 » est faux, or la seule possibilité pour qu'une implication soit fausse est qu'une assertion vraie implique une assertion fausse, donc l'assertion 1 est vraie.
2) Une phrase, en français, du genre « soit..., soit... » se traduit mathématiquement par « ... ou... » « Marrakech et en France » est faux et « les grenouilles aboient » est faux donc l'assertion 2 est fausse.
3) « Les roses sont des animaux » est faux et « les chiens ont 4 pattes » est vrai, donc l'assertion 3 est vraie.
4) « L'homme est un quadrupède » est faux et « il parle » est vrai, donc l'assertion 4 est vraie.
5) « Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » peut se traduire par « les roses ne sont pas des animaux et les roses ne sont pas des fleurs ». « Les roses ne sont pas des animaux » est vrai et « les roses ne sont pas des fleurs » est faux donc « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs », donc l'assertion 5 est fausse.
6) « Marrakech est au Maroc » est vrai et « Madrid est en chine » est faux, donc « Marrakech est au Maroc ou Madrid est en chine » est vraie.
Exercice2 : Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les symboles logiques et les quantificateurs
1) « l'équation $3x^2-2x-5=0$ admet une solution unique dans l'ensemble $\mathbb{N}$ »
2) « l'inéquation $x^2-3x-11\leq 0$ n'admet pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ »
3) « si un entier naturel est un multiple de 12 alors il est divisible par 3 »
4) « un entier naturel est pair si et seulement c'est un multiple de 2»
Solution :1) $\left(\exists! x\in\mathbb{N}\right)/\ 3x^2-2x-5=0$
2) $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)/\ x^2-3x-11\succ 0$
3) $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)/\left(\exists k\in\mathbb{N}\right)n=12k\Rightarrow\left(\exists k'\in\mathbb{N}\right)n=3k'$
4) $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)/\ n\,est\ pair\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{N}\right)n=2k$
Exercice3 : Nier les assertions suivantes :
1) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
3) $\left(\forall\varepsilon\succ 0\right);\left(\exists\alpha\succ 0\right):\left|x-\frac{5}{7}\right|\prec\alpha\Rightarrow\left|5x-7\right|\prec\varepsilon$
Solution :1) Il existe un triangle rectangle qui ne possède pas un angle droit.
2) Il existe au moins une écurie ou il Ya un cheval non noir.
3) $\left(\exists\varepsilon\succ 0\right);\left(\forall\alpha\succ 0\right):\left|x-\frac{5}{7}\right|\prec\alpha\ \ et\ \ \left|5x-7\right|\geq\varepsilon$
Exercice4 : On considère les propositions suivantes $P:"\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right):x^2\geq x\ "$

Q :" $\left(\forall a\in[0;+\infty[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\prec 1$ " et R :"$P\Rightarrow Q$"

1) Donner : $\overline{P}$; $\overline{Q}$ et $\overline{R}$

2) Montrer que P est fausse

3) Déterminer la valeur de vérité de : Q

4) Déterminer la valeur de vérité de : R

Solution :1) $\overline{P}$:"$\left(\exists x\in]0;+\infty[\right):x^2\prec x$ "

$\overline{Q}$:"$\left(\exists a\in[0;+\infty[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\geq 1$" et $\overline{R}$:"P et $\overline{Q}$"

$\overline{R}$:"$\left(\forall x\in]0;+\infty[\right):x^2\geq x$ et $\left(\exists a\in[0;+\infty[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\geq 1$"

2)Montrons que P est fausse

$\overline{P}$:"$\left(\exists x\in]0;+\infty[\right):x^2\prec x$" est vraie car :"$\left(\exists x=\dfrac{1}{2}\in]0;+\infty[\right):\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\prec\dfrac{1}{2}$"

Donc : $\overline{P}$:est vraie et par suite : P est une proposition fausse

3) Déterminons la valeur de vérité de : Q

On a :$\overline{Q}$:"$\left(\exists a\in[0;+\infty[\right):\dfrac{2a}{1+\sqrt{a}}\geq 1$" est vraie car :"$\left(\exists a=1\in[0;+\infty[\right):\dfrac{2\times 1}{1+\sqrt{1}}=1\geq 1$"

Par suite : Q est une proposition fausse

4) Déterminons la valeur de vérité de : R

On a : R :"$P\Rightarrow Q$" avec : P est une proposition fausse et Q est une proposition fausse

Donc : d'après le tableau de vérité de : "$\Rightarrow$"

R est une proposition vraie

Exercice5 : A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules "P ou $\overline{P}$" est une tautologie.

Solution :

P	$\overline{P}$	P ou $\overline{P}$
F	V	V
V	F	V

"P ou $\overline{P}$" est une tautologie car toujours Vraie

Exercice6 : 1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $\dfrac{1}{1-x}=1+x+\dfrac{x^2}{1-x}$

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $|x|\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leq 2x^2$

Solution : 1) a) Soit :$x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $1+x+\dfrac{x^2}{1-x}=\dfrac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x}=\dfrac{1^2-x^2+x^2}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$

b) Soit :$x\in\mathbb{R}-\{1\}$ tel que : $|x|\leq\dfrac{1}{2}$

On a : $\dfrac{1}{1-x}=1+x+\dfrac{x^2}{1-x}$ donc : $\dfrac{1}{1-x}-(1+x)=\dfrac{x^2}{1-x}$

Donc : $\left|\dfrac{1}{1-x}-(1+x)\right|=\left|\dfrac{x^2}{1-x}\right|$

C'est-à-dire : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|=\frac{x^2}{|1-x|}$ (1) Car : $x^2\geq 0$

On a : $|x|\leq\frac{1}{2}$ donc : $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}\leq -x\leq\frac{1}{2}$

Donc : $1-\frac{1}{2}\leq 1-x\leq 1+\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}\leq 1-x\leq\frac{3}{2}$ et par suite : $\frac{2}{3}\leq\frac{1}{1-x}\leq 2$ donc :
$-2\leq\frac{2}{3}\leq\frac{1}{1-x}\leq 2$

Par suite : $\frac{1}{|1-x|}\leq 2$ et puisque : $x^2\geq 0$ alors : $\frac{x^2}{|1-x|}\leq 2x^2$ et d'après l'égalité (1)

On a donc : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leq 2x^2$

Exercice7 : Montrer que :$\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):a^2+b^2=1\Rightarrow|a+b|\leq\sqrt{2}$

Solution : 1) Supposons que : $a^2+b^2=1$

Or on sait que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}$:$(a-b)^2\geq 0$

Donc : $a^2-2ab+b^2\geq 0$ et puisque : $a^2+b^2=1$ alors :
$1-2ab\geq 0$ Donc $2ab\leq 1$ et $a^2+b^2=1$

Par suite : $a^2+b^2+2ab\leq 2$ donc $(a+b)^2\leq 2$

Donc $\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{2}$ alors : $|a+b|\leq\sqrt{2}$

Exercice8 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Solution : Prenons $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$.

Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Alors $a=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$;

De même $b=\frac{p'}{q'}$ avec $p'\in\mathbb{Z}$ et $q'\in\mathbb{N}^*$

Donc : $a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{p\times q'+q\times p'}{q\times q'}$. Or le numérateur $p\times q'+q\times p'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$ le dénominateur $q\times q'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$.

Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b=\frac{p''}{q''}$ avec $p''\in\mathbb{Z}$ et $q''\in\mathbb{N}^*$ Ainsi $a+b\in\mathbb{Q}$

Exercice9 : Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$

Solution : Nous raisonnons par équivalence : Soit : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

$a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2(a\times b+a\times c+b\times c)$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2a\times b-2a\times c-2b\times c\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(a^2-2a\times b+b^2\right)+\left(a^2-2a\times c+c^2\right)+\left(b^2-2b\times c+c^2\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$; (vraie)

Donc : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$

Exercice10 : Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$; $x^2+xy+y^2+1\succ 0$

2) Déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$: $x\neq y\Rightarrow x^3+x\neq y^3+y$

Solution : 1) soit $y\in\mathbb{R}$ (on le fixe)

L'équation : $x^2+xy+y^2+1\succ 0$ devient une équation dont la variable est x

$\Delta = y^2 - 4\times 1\times\left(y^2+1\right) = y^2 - 4y^2 + -4 = -3y^2 - 4 = -\left(3y^2+4\right) \prec 0$

le signe de : $x^2 + xy + y^2 + 1$ est celui de $a = 1$

Donc : $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

2) Déduction que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$: $x \neq y \Rightarrow x^3 + x \neq y^3 + y$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

L'assertion : $x \neq y \Rightarrow x^3 + x \neq y^3 + y$ est équivalente à : $x^3 + x = y^3 + y \Rightarrow x = y$

Montrer que : $x^3 + x = y^3 + y \Rightarrow x = y$

Soit : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: Supposons que : $x^3 + x = y^3 + y$

Donc : $x^3 - y^3 + x - y = 0 \Rightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) + (x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right) = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \;\; ou \;\; x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$

Comme : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$ alors $x^2 + xy + y^2 + 1 \neq 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \;\Rightarrow x = y$

Par contraposition ceci équivalent à : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$: $x \neq y \Rightarrow x^3 + x \neq y^3 + y$

Exercice11 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$

2) Déduire que : $\forall(a;b;c;d) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 6$

3) Montrer que : $\forall(a;b;c) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

4) Soit $(a;b;c) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: on pose : $x = a + \frac{1}{b}$; $y = b + \frac{1}{c}$ et $z = c + \frac{1}{a}$

Montrer que : $x \geq 2$ ou $y \geq 2$ ou $z \geq 2$

Solution : 1) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $x \in \mathbb{R}^*$: $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$; (vraie)

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$

2) Déduction : Soit : $(a;b;c;d) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Donc : $\frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}} \geq 2$ c'est à dire : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ $\boxed{1}$

De même on a aussi : $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$ $\boxed{2}$ et de même on a aussi : $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$ $\boxed{3}$

$\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}$ membre a membre donne : $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 6$ (Vraie)

3) Montrons que : $\forall(a;b;c) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(a;b;c;d) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \geq 9$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 6$ (Vraie)

Donc : $\forall(a;b;c;d) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

4) Soit $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$ Montrons que : $x\geq 2$ ou $y\geq 2$ ou $z\geq 2$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x\prec 2$ ou $y\prec 2$ ou $z\prec 2$

$$\begin{cases} x\prec 2\ (1) \\ y\prec 2\ (2) \\ z\prec 2\ (3) \end{cases} \overset{(1)+(2)+(3)}{\Rightarrow} x+y+z\prec 8 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)\prec 8 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\prec 8 ©$$

Or on a : $\begin{cases} a+\frac{1}{a}\geq 2\ \ (1) \\ b+\frac{1}{b}\geq 2\ \ (2) \\ c+\frac{1}{c}\geq 2\ \ (3) \end{cases} \overset{(1)+(2)+(3)}{\Rightarrow} \left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 8$ contradiction avec©

Donc : $x\geq 2$ ou $y\geq 2$ ou $z\geq 2$

Exercice12 : Soit $n\in\mathbb{N}$et $p\in\mathbb{N}$: Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Solution :

- Si n ou p sont pairs alors $n\times p$ est pair
- Si n ou p sont impairs alors

$n=2k+1$ et $p=2k'+1$ avec $k\in\mathbb{N};k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2-p^2=(2k+1)^2-(2k'+1)^2$

$n^2-p^2=4\left(k(k+1)-k'(k'+1)\right)$ et on a : $m(m+1)$ est pair

$n^2-p^2=4(2\alpha-2\beta)=8(\alpha-\beta)=8k''$

Donc : n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Exercice13 : Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1) Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$

2) En déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Remarque : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Solution :1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b\neq 0$

$a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow b\sqrt{2}=-a\Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{2}$

Or $a;b\in\mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b=0$ et puisque : $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=0$

2) supposons que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc $a-a'+b\sqrt{2}-b'\sqrt{2}=0$

Donc $a-a'+\sqrt{2}(b-b')=0$ et d'après 1**) on aura :** $a-a'=0$ et $b-b'=0$

Donc $a=a'$ et $b=b'$

Exercice14 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 Par 5 est : $E=\{0;1;4\}$

2) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$: On a : 5 cas possibles seulement pour n

$n=5k$ ou $n=5k+1$ ou $n=5k+2$ ou $n=5k+3$ ou $n=5k+4$ avec$k\in\mathbb{N}$

1[ére]cas : $n=5k$ alors $n^2=(5k)^2=25k^2=5\times(5k^2)=5k'=5k'+0$

Donc : 0 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

2[ére]cas : $n=5k+1$ alors $n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5\times(5k^2+2k)+1=5k'+1$

Donc : 1 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

3[ére]cas : $n=5k+2$ alors $n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5\times(5k^2+4k)+4=5k'+4$

Donc : 4 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

4[ére]cas : $n=5k+3$ alors $n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=(25k^2+30k+5)+4$

$n^2=(5k+3)^2=5\times(5k^2+6k+1)+4=5k'+4$

Donc : 4 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

5[ére]cas : $n=5k+4$ alors $n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=(25k^2+40k+15)+1$

$n^2=(5k+4)^2=5\times(5k^2+8k+3)+1=5k'+1$

Donc : 1 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

Donc : L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 Par 5 est : $E=\{0;1;4\}$

2)Nous raisonnons par l'absurde en supposant : $\exists k\in\mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12}\in\mathbb{N}$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12}=n$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$; $5k+12=n^2$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$; $5k+10+2=n^2$

Donc : $\exists k\in\mathbb{N}$ et $\exists n\in\mathbb{N}$; $5(k+2)+2=n^2$

Donc : $\exists n\in\mathbb{N}$ tel que 2 est le reste de la division euclidienne de n^2 Par 5

Nous obtenons donc une contradiction avec la faite que : L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 par 5 est : $E=\{0;1;4\}$ car 2 ne peut pas être le reste de la division euclidienne de n^2 par 5

Exercice15 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; 7 divise $3^{2n}-2^n$

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $3^{2n}-2^n=3^0-2^0=1-1=0$ et 7 divise 0

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,3^{2n}-2^n=7k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,3^{2n+2}-2^{n+1}=7k'$??

$3^{2n+2}-2^{n+1}=3^2\times3^{2n}-2^1\times2^n=9\times3^{2n}-2\times2^n=(7+2)\times3^{2n}-2\times2^n=7\times3^{2n}+2\times3^{2n}-2\times2^n$

$=7\times3^{2n}+2\times(3^{2n}-2^n)=7\times3^{2n}+2\times7k=7\times(3^{2n}+2k)=7k'$ avec $k'=3^{2n}+2k$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; 7 divise $3^{2n}-2^n$

Erreur classique dans les récurrences

Exercice16 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

$P(n)$: 4^n-1 est divisible par 3 et $Q(n)$: 4^n+1 est divisible par 3

1) Démontrer que : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

2) Démontrer que : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

3) Un élève affirme : " Donc $P(n)$ et $Q(n)$ sont vraies pour tout entier naturel n ".

Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.

4) Démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

5) Que penser, alors, de l'assertion : $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}): n\geq n_0\Rightarrow Q(n)$

Solution :1) Démontrons que : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Supposons que : 4^n-1 est divisible par 3 c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n-1=3k$

Montrons que : $4^{n+1}-1$ est divisible par 3 ??

$4^{n+1}-1=4^n\times 4^1-1=(3k+1)\times 4-1=3\times 4k+4-1=3\times 4k+3=3\times(4k+1)=3\times k'$

Donc : $4^{n+1}-1$ est divisible par 3 Donc : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

2) Démontrons que : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

Supposons que : 4^n+1 est divisible par 3 c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n+1=3k$

Montrons que : $4^{n+1}+1$ est divisible par 3 ??

$4^{n+1}+1=4^n\times 4^1+1=(3k-1)\times 4+1=4\times 3k-4+1=4\times 3k-3=3\times(4k-1)=3\times k'$

Donc : $4^{n+1}+1$ est divisible par 3

Donc : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

3) Cet élève qui affirme : " Donc $P(n)$ et $Q(n)$ sont vraies pour tout entier naturel n ".

Il commet une erreur : en effet : Pour n=0 : $4^0+1=1+1=2$ n'est pas divisible par 3

La proposition : « $\forall n\in\mathbb{N}$ 4^n+1 est divisible par 3 » est fausse bien que : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

4) Démontrons que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

1étapes : l'initialisation : Pour n =0 nous avons : $4^0-1=1-1=0$ et 0 est divisible par 3

Donc $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n-1=3k$

Montrons que : $4^{n+1}-1$ est divisible par 3??

$4^{n+1}-1=4^n\times 4^1-1=(3k+1)\times 4-1=3\times 4k+4-1=3\times 4k+3=3\times(4k+1)=3\times k'$

Donc : $4^{n+1}-1$ est divisible par 3

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : « $\forall n\in\mathbb{N}$ 4^n-1 est divisible par 3 » (vraie)

5)Par l'absurde : Supposons que : $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}):n\geq n_0\Rightarrow Q(n)$

Donc ; $n\geq n_0\Rightarrow \exists k'\in\mathbb{N}\,/\,4^n+1=3k$ ❶

Or on a montré que : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n-1=3k$ ❷

❶-❷$\Rightarrow$ $\exists k;k'\in\mathbb{N}\,/\,2=3(k-k')=3k''$ avec $k''=k-k'\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$3 divise 2 : absurdes ou contradiction avec 3 ne divise pas 2

Donc : $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}):n\geq n_0\Rightarrow Q(n)$ est fausse.

Attention : Erreur classique dans les récurrences ne pas commettre il ne faut pas oublier 1étapes : l'initialisation

Exercice17 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}$.

Solution : Notons P(n) la proposition : "$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}1(1-1)=0$ et $\frac{1(1^2-1)}{6}=0$ Donc P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n+1} k(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$??

On a : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n+1} k(n+1-k) = \sum_{k=1}^{k=n} k(n+1-k) + (n+1)(n+1-(n+1)) = \sum_{k=1}^{k=n} k(n-k) + \sum_{k=1}^{k=n} k$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k(n-k) = \frac{n(n^2-1)}{6}$

Donc : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n+1} k(n+1-k) = \frac{n(n^2-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2-1)+3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)+3n(n+1)}{6}$

Donc : $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(n-1+3)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k(n-k) = \frac{n(n^2-1)}{6}$.

Exercice18 : Soient : x_1 ; x_2 ; x_3 ; …. ; x_n des nombres réels dans $[0;1]$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=n} x_k$.

Solution : Notons P(n) La proposition " $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ "

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $\prod_{k=1}^{k=1}(1-x_k) = 1-x_1$ et $1-\sum_{k=1}^{k=1} x_k = 1-x_1$

Donc : $\prod_{k=1}^{k=1}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=1} x_k$ par suite P(1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=n+1} x_k$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ et comme : $1-x_{n+1} \geq 0$ car $x_{n+1} \in [0;1]$

Donc : $(1-x_{n+1})\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k) \geq \left(1-\sum_{k=1}^{k=n} x_k\right)(1-x_{n+1})$

Donc : $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{k=n} x_k - x_{n+1} + x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

Donc : $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k) \geq 1-\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k + x_{n+1}\right) + \left(x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n} x_k\right)$

Donc: $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k+\left(x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\right)$ et puisque : $x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\geq 0$ alors :

$$1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k+\left(x_{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}x_k\right)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k$$

Par suite on a : $\prod_{k=1}^{k=n+1}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n+1}x_k$ c'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n}x_k$.

Exercice19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I)\ \sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}\succ\frac{1}{2}$

Solution : On va Opérer par disjonction de cas :
On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation :

$$D=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0\ \ et\ \ 3-x\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -1\ \ et\ \ x\leq 3\}=[-1;3]$$

Soit $x\in[-1;3]$ et S l'ensemble des solutions de (I)

1 cas : si $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}\leq 0\ \Leftrightarrow\sqrt{3-x}\leq\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 3-x\leq x+1$

$\Leftrightarrow 2\leq 2x\Leftrightarrow x\geq 1$ et $x\in[-1;3]\Leftrightarrow x\in[1;3]$

Donc : l'Inéquation n'admet pas de solution c'est-à-dire : $S_1=\varnothing$

2 cas : si alors $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}\succ 0$

$$x\in S_2\Leftrightarrow\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}\succ\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}\right)^2\succ\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow 3-x+x+1-2\sqrt{(x+1)(3-x)}\succ\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{(x+1)(3-x)}\succ\frac{1}{4}\Leftrightarrow 16-8\sqrt{(x+1)(3-x)}\succ 1\Leftrightarrow -8\sqrt{(x+1)(3-x)}\succ -15$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{-x^2+2x+3}\prec\frac{15}{8}\Leftrightarrow -x^2+2x+3\prec\frac{225}{64}\Leftrightarrow x^2-2x-3\succ\frac{225}{64}\Leftrightarrow x^2-2x+1-4\succ\frac{225}{64}$$

$\Leftrightarrow(x-1)^2\succ\frac{31}{64}\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2}\succ\sqrt{\frac{31}{64}}\Leftrightarrow|x-1|\succ\frac{\sqrt{31}}{8}$ Mais : $x\in[-1;1[$ donc : $x-1\prec 0$

$\Leftrightarrow -x-1\succ\frac{\sqrt{31}}{8}\Leftrightarrow -x\succ\frac{\sqrt{31}}{8}-1\Leftrightarrow x\prec 1-\frac{\sqrt{31}}{8}$; On peut vérifier que : $-1\prec 1-\frac{\sqrt{31}}{8}\prec 1$

$x\in S_2\Leftrightarrow x\in\left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[$; Donc $S_2=\left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[$

Donc : $S=\varnothing\cup\left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[=\left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien