1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Série N°11 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/)

Exercice1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?
1) Si Marrakech et en France alors 3 − 2 = 2 ;
2) Soit Marrakech et en France, soit les grenouilles aboient ;
3) Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes ;
4) Si l'homme est un quadrupède, alors il parle ;
5) Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs ;
6. Marrakech est au Maroc ou Madrid est en chine.

Exercice2 : Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les symboles logiques et les quantificateurs
1) « l'équation $3x^2-2x-5=0$ admet une solution unique dans l'ensemble $\mathbb{N}$ »
2) « l'inéquation $x^2-3x-11\leq 0$ n'admet pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ »
3) « si un entier naturel est un multiple de 12 alors il est divisible par 3 »
4) « un entier naturel est pair si et seulement c'est un multiple de 2»

Exercice3 : Nier les assertions suivantes :
1) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
3) $(\forall\varepsilon\succ 0);(\exists\alpha\succ 0):\left|x-\frac{5}{7}\right|\prec\alpha\Rightarrow|5x-7|\prec\varepsilon$

Exercice4 : On considère les propositions suivantes $P:"\left(\forall x\in]0;+\infty[\right):x^2\geq x"$

$Q:"\left(\forall a\in[0;+\infty[\right):\frac{2a}{1+\sqrt{a}}\prec 1"$ et $R:"P\Rightarrow Q"$
1) Donner : $\overline{P}$; $\overline{Q}$ *et* $\overline{R}$
2) Montrer que P est fausse
3) Déterminer la valeur de vérité de : Q
4) Déterminer la valeur de vérité de : R

Exercice5 : A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $"P \text{ ou } \overline{P}"$ est une tautologie.

Exercice6 : 1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $|x|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leq 2x^2$

Exercice7 : Montrer que : $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):a^2+b^2=1\Rightarrow|a+b|\leq\sqrt{2}$

Exercice8 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Exercice9 : Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $a^2+b^2+c^2\geq a\times b+a\times c+b\times c$

Exercice10 : Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$; $x^2+xy+y^2+1\succ 0$

2) Déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$: $x\neq y\Rightarrow x^3+x\neq y^3+y$

Exercice11 : 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

2) Déduire que : $\forall(a;b;c;d)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^4$: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\geq 6$

3) Montrer que : $\forall(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$

4) Soit $(a;b;c)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$: on pose : $x=a+\dfrac{1}{b}$; $y=b+\dfrac{1}{c}$ et $z=c+\dfrac{1}{a}$

Montrer que : $x\geq 2$ ou $y\geq 2$ ou $z\geq 2$

Exercice12 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$: Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Exercice13 : Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1) Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$

2) En déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Remarque : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice14 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; L'ensemble des restes de la division euclidienne de n^2 Par 5 est : $E=\{0;1;4\}$

2) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}$; $\sqrt{5k+12}\notin\mathbb{N}$

Exercice15 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; 7 divise $3^{2n}-2^n$

Exercice16 : Erreur classique dans les récurrences

Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

$P(n)$: 4^n-1 est divisible par 3 et $Q(n)$: 4^n+1 est divisible par 3

1) Démontrer que : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

2) Démontrer que : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

3) Un élève affirme : " Donc $P(n)$ et $Q(n)$ sont vraies pour tout entier naturel n ".

Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.

4) Démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

5) Que penser, alors, de l'assertion : $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}) : n\geq n_0\Rightarrow Q(n)$

Exercice17 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}k(n-k)=\frac{n(n^2-1)}{6}$.

Exercice18 : Soient : x_1 ; x_2 ; x_3 ; …. ; x_n des nombres réels dans $[0;1]$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(1-x_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{k=n}x_k$.

Exercice19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I) $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}\succ\dfrac{1}{2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien