1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°10 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :1) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$

2) $P:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x>y$

3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$

4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$

5) $P:(\forall \varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/x\prec\varepsilon+10$

Solution :1) Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x\leq y$

$P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$ Est une proposition vraie car l'lorsque je prends x je peux trouver y il suffit de prendre : $y=x-1$

2) il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on a x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x\leq y$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends x je peux toujours donner à y la valeur: $y=x+1$

3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ si x^2 est supérieur ou égal à 4 alors x est supérieur ou égal à 2

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});x^2\geq 4$ et $x\prec 2$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends $x=-2$ on a $(-2)^2\geq 4$ et $-2\prec 2$

4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$

il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x^2 est égal à 4

$\overline{P}:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\neq 4$

P une proposition vraie car il suffit de prendre : $x=2$

5) $P:(\forall \varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/x\prec\varepsilon+10$

Pour tout ε supérieur strictement a 0 il existe au moins un x qui s'écrit sous la forme $1+\frac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ tel que x est inferieur strictement a $\varepsilon+10$

$\overline{P}:(\exists \varepsilon\succ 0);\left(\forall x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/x\geq\varepsilon+10$

Soit $\varepsilon\succ 0$ $\quad x\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n}\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow\frac{1}{n}\prec\varepsilon+9\Leftrightarrow n\succ\frac{1}{\varepsilon+9}$

Donc pour $n=E\left(\frac{1}{\varepsilon+9}\right)+1$ on prend $x=1+\frac{1}{n}$ et on a $x\prec\varepsilon+10$

P Est donc une proposition vraie

Exercice2 : On considère la suivante : $P:(\exists x \in \mathbb{R}): 2x^2 - x + 1 \leq 0$

1) Ecrire la négation de P
2) Déterminer la valeur de vérité de P
3) Donner la négation de la proposition : $Q:(\forall x \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R}^+): x^2 \leq a \Rightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$

Solution :1) $\overline{P}:(\forall x \in \mathbb{R}): 2x^2 - x + 1 \succ 0$

2)Déterminons le signe de : $2x^2 - x + 1$: On a : $\Delta = (-1)^2 - 8 = -7 \prec 0$

Le signe de $2x^2 - x + 1$ est celui de $a = 2 \succ 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}): 2x^2 - x + 1 \succ 0$ est vraie

Donc : $\overline{P}$: est vraie par suite P est fausse

3) $non(P \Rightarrow Q)$ est P et $non(Q)$

$\overline{Q}:(\exists x \in \mathbb{R})(\exists a \in \mathbb{R}^+): x^2 \leq a \ et \ \left(\left(x \prec -\sqrt{a}\right) ou \left(x \succ \sqrt{a}\right)\right)$

Exercice3 : On considère les assertions suivantes :

P :"$(\forall x \in]0;+\infty[): \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$" Q :"$(\forall a \in]0;+\infty[; \forall b \in]0;+\infty[): \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$"

R :"$(\forall x \in [1;+\infty[): \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$" ;

1)Montrer que P ;Q etR sont vraies

2) Donner : $\overline{P}$; $\overline{Q}$ et $\overline{R}$

Solution :1)a)Soit : $x \in]0;+\infty[$: Montrons que : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} \leq 2 + x \Leftrightarrow 0 \leq 1 + x - 2\sqrt{1+x} + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1+x}^2 - 2\sqrt{1+x} + 1^2 \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{1+x} - 1\right)^2$$

Donc : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{1+x} - 1\right)^2$ (vraie)

P :"$(\forall x \in]0;+\infty[): \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$"est vraie

b) Soit : $(a \in]0;+\infty[; b \in]0;+\infty[)$: Montrons que : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$(vraie)

Donc : Q :"$(\forall a \in]0;+\infty[; \forall b \in]0;+\infty[): \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$" est vraie

c)Soit : $x \in [1;+\infty[$; Montrons que : : $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$"

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}^2 + 1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 + 1 \geq 2\sqrt{x}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \geq 0$ est vraie

Par suite : R :"$(\forall x \in [1;+\infty[): \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$" est vraie

2) P :"$(\forall x \in]0;+\infty[): \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$"

$\overline{P}$: "$\left(\exists x \in \left]0;+\infty\right[\right): \sqrt{1+x} \succ 1+\frac{x}{2}$"

Q : "$\left(\forall a \in \left]0;+\infty\right[; \forall b \in \left]0;+\infty\right[\right): \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$"

$\overline{Q}$: "$\left(\exists a \in \left]0;+\infty\right[; \exists b \in \left]0;+\infty\right[\right): \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \prec 2$"

R : "$\left(\forall x \in \left[1;+\infty\right[\right): \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$"

$\overline{R}$: "$\left(\exists x \in \left[1;+\infty\right[\right): \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \prec 2$"

Exercice4 : On considère les assertions suivantes : P : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right): f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

1) Ecrire la négation de P

2) Soit f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $(\forall x \in \mathbb{R}): f(x)=x^2+2x+2$

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}): f(-x-2)=f(x)$

3) Est ce que : P est vraie ? justifier votre réponse

Solution : 1) a) P : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right): f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

Remarque : "$non(U \Rightarrow V)$" est "$U \ et \ non(V)$"

Alors : $\overline{P}$: $\left(\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) / f(x)=f(y) \ et \ x \neq y$

2) Montrons que : Soit : $x \in \mathbb{R}$; $f(-x-2)=(-x-2)^2+2(-x-2)+2$

$f(-x-2)=x^2+4x+4-2x-4+2=x^2+2x+2$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}): f(-x-2)=f(x)$

3) on a $-x-2 \neq x$ mais $f(-x-2)=f(x)$

Par exemple : x=1 alors $-1-2 \neq 1$ c'est-à-dire : $-3 \neq 1$ mais : $f(-3)=f(1)$

Donc : $\left(\exists (1;-3) \in \mathbb{R}^2\right) / f(1)=f(-3) \ et \ 1 \neq -3$

C'est-à-dire : $\overline{P}$ est une assertion vraie par suite : P est une assertion fausse

Exercice5 : Montrer par un Raisonnement direct que : $\forall x \in \left]1;+\infty\right[$; $\frac{1}{\sqrt{3+x^2}} \prec \frac{1}{2}$

Solution : Utilisons un Raisonnement direct

$x \in \left]1;+\infty\right[\Rightarrow x \succ 1 \Rightarrow x^2 \succ 1^2 \Rightarrow x^2+3 \succ 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} \succ 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \prec \frac{1}{2}$

Donc : $\forall x \in \left]1;+\infty\right[$; $\frac{1}{\sqrt{3+x^2}} \prec \frac{1}{2}$

Exercice6 : Montrer que : $\forall x \in [-2;2]: 2\sqrt{2} \succ \sqrt{4-x^2}$.

Solution : l'inéquation est définie si et seulement si $4-x^2 \geq 0$

voici le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_I=[-2;2]$

Soit $x\in[-2;2]$: $2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}=\frac{8-4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}$

$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}\succ 0$

Donc : $\forall x\in[-2;2]:2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$

Exercice7 : Montrer que : $\left(\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\right):x+y+z=0\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

Solution : Soient $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$

$x+y+z=0\Leftrightarrow x+y=-z\Leftrightarrow(x+y)^3=(-z)^3\Leftrightarrow x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=-z^3$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)$ or $(x+y=-z)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3xy(-z)=3xyz$

Exercice8 : Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n :est un entier Naturel, x *et* y :sont des nombres réels.

1) P: n premier$\Rightarrow n=2$ ou n est impair

2) $Q:xy\neq 0\Rightarrow x\neq 0$ *et* $y\neq 0$

3) $R:x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Solution : 1) la contraposées de P est : $n\neq 2$ et n est pair $\Rightarrow$ n non premier

Démonstration : Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons : $n\neq 2$ et n est pair

Alors : 2 divise n et $n\neq 2$

Par suite : n non premier

2) La contraposées de Q est : $:x=0$ *et* $y=0$ $\Rightarrow xy=0$

Démonstration :(triviale) supposons : $:x=0$ *et* $y=0$

Alors : $xy=0\times 0=0$

3) La contraposées de R est : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$

Démonstration : Soient $x\in\mathbb{R}$ *et* $y\in\mathbb{R}$

Supposons $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)$ et montrons que : $x=y$

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)$ alors en développant : $xy-x+y-1=xy+x-y-1$

Alors : $-x+y=x-y$ donc : $2x-2y=0$

Alors : $2x=2y$ c'est-à-dire : $x=y$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\ (x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$ est vraie

Par suite : $R:x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$ est vraie

Exercice9 : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$.

Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $2n+1$ est un carré parfait $\Rightarrow$ $n+1$ est la somme de carrés parfaits

Solution :1) Nous supposons que n n'est pas impair

Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas impair

Comme n n'est pas impair il est pair et donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k$.

Alors $n^2=(2k)^2=4k^2=2\times 2k^2=2k'$ avec $k'=2k^2\in\mathbb{N}$.

Et donc n^2 est pair.

Conclusion : nous avons montré que si n est pair alors n^2 est pair.

Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est impair alors n est impair.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$: Supposons que : $2n+1$ est un carré parfait

Donc : $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $2n+1=m^2$

On a : $m^2 = 2n+1$ donc : m^2 est impair.
Donc : d'après :1) m est aussi impair.
Donc : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que : $m = 2k+1$

On a : $2n+1 = m^2$ donc : $n = \frac{m^2-1}{2}$

Donc : $n+1 = \frac{m^2-1}{2} + 1 = \frac{m^2-1+2}{2} = \frac{m^2+1}{2}$

Donc : $n+1 = \frac{(2k+1)^2+1}{2}$

Donc : $n+1 = \frac{4k^2+4k+1+1}{2} = k^2+k^2+2k+1$

Donc : $n+1 = k^2 + (k^2+2k+1)$

Donc : $n+1 = k^2 + (k+1)^2$ Cqfd

Exercice10 : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$; Montrer que : soit 4 divise n^2 soit 4 divise n^2-1

Solution : On va Opérer par disjonction de cas : Soit : $n \in \mathbb{N}^*$;

1cas : n est pair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n^2 = 4k^2 = 4k' \Longrightarrow$ 4 divise n^2
2cas : n est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k+1$
$\Rightarrow n^2-1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2+4k = 4(k^2+k) = 4k' \Longrightarrow$ 4 divise n^2-1

Exercice11 : Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tout autre.
Solution : Montrons qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tout autre. Par l'absurde :
Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} . n \leq N$
Pour $n = N+1 \in \mathbb{N}$, on a : $N+1 \leq N$ donc $1 \leq 0$. Absurde.
Donc :il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tout autre
Exercice12 :1) Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall \varepsilon \succ 0 : a \prec \varepsilon$
Montrer que : $a = 0$
2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall \varepsilon \succ 0 : |a-b| \prec \varepsilon$
Montrer que : $a = b$
3) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
Montrer que : $a \leq b \Leftrightarrow \forall \varepsilon \succ 0 : a \prec b + \varepsilon$
Solution :1) Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall \varepsilon \succ 0 : a \prec \varepsilon$
Montrons que : $a = 0$
Supposons : $a \neq 0$ et comme : $a \in \mathbb{R}^+$ alors : $a \succ 0$
et puisque : $\forall \varepsilon \succ 0 : a \prec \varepsilon$ on prend : $\varepsilon = a \succ 0$ on aura donc : $a \prec a$ contradiction
Donc : $a = 0$
2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall \varepsilon \succ 0 : |a-b| \prec \varepsilon$
Montrons que : $a = b$
Supposons : $a \neq b$ alors : $|a-b| \succ 0$
et puisque : $\forall \varepsilon \succ 0 : |a-b| \prec \varepsilon$ on prend : $\varepsilon = |a-b| \succ 0$ on aura donc : $|a-b| \prec |a-b|$
contradiction et donc : $a = b$
3) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$) Montrons que : $a \leq b \Rightarrow \forall \varepsilon \succ 0 : a \prec b + \varepsilon$?
Supposons : $a \leq b$ et Supposons $\exists \varepsilon \succ 0 / a \geq b + \varepsilon$
Alors : $\exists \varepsilon \succ 0 / a - b \geq \varepsilon \succ 0$
Alors : $a - b \succ 0$ c'est-à-dire : $a \succ b$ contradiction avec $a \leq b$
Donc : $a \leq b \Rightarrow \forall \varepsilon \succ 0 : a \prec b + \varepsilon$

$\Leftarrow$) Montrons que : $\forall\varepsilon\succ 0 : a \prec b+\varepsilon \Rightarrow a\leq b$?

$\forall\varepsilon\succ 0 : a \prec b+\varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon\succ 0 : a-b \prec \varepsilon$

Supposons $a-b\succ 0$ on prend : $\varepsilon = a-b\succ 0$ et puisque : $\forall\varepsilon\succ 0 : a-b\prec\varepsilon$ alors $a-b\prec a-b$ contradiction.

$\forall\varepsilon\succ 0 : a\prec b+\varepsilon \Rightarrow a\leq b$

Conclusion : $a\leq b \Leftrightarrow \forall\varepsilon\succ 0 : a\prec b+\varepsilon$

Exercice13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I_3): $\sqrt{x-1}\geq x-7$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation (I_3) : $\sqrt{x-1}\geq x-7$:

$D_3 = \{x\in\mathbb{R} / x-1\geq 0\} = [1;+\infty[$

Le tableau de signe de l'expression $x-7$ est :

x	$-\infty$ 7 $+\infty$
$x-7$	$-$ 0 $+$

Soit $x\in[1;+\infty[$ et S l'ensemble des solutions de (I_3)

$x\in S \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\geq x-7$

1 cas : si $x\in[1;7[$ alors $x-7\prec 0$

Donc : l'Inéquation est vraie pour tout $x\in[1;7[$

Donc $S_1 = [1;7[$

2 cas : si $x\in[7;+\infty[$ alors $x-7\geq 0$

Donc : $x\in S \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\geq x-7 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \leq (x-7)^2$

$\Leftrightarrow x-1-(x^2-14x+49)\geq 0 \Leftrightarrow -x^2+15x-50\geq 0 \Leftrightarrow x\in[5;10]$ Donc $S_2 = [5;10]\cap[7;+\infty[= [7;10]$

Donc : $S = S_1\cup S_2 = [1;7[\cup[7;10] = [1;10]$

Exercice14 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

$P(n)$: $10^n - 1$ est divisible par 9 et $Q(n)$: $10^n + 1$ est divisible par 9

1) Démontrer que : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

2) Démontrer que : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

3) Un élève affirme : " Donc $P(n)$ et $Q(n)$ sont vraies pour tout entier naturel n ".
Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.

4) Démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

5) Démontrer que $Q(n)$ est fausse pour tout entier naturel n.
(On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.)

Solution : 1) Démontrons que : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Supposons que : $10^n - 1$ est divisible par 9 c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 10^n - 1 = 9k$

Montrons que : $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9 ??

$10^{n+1} - 1 = 10^n\times 10^1 - 1 = (9k+1)\times 10 - 1 = 9\times 10k + 10 - 1 = 9\times 10k + 9 = 9\times(10k+1) = 9\times k'$

Donc : $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9

Donc : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

2) Démontrons que : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

Supposons que : $10^n + 1$ est divisible par 9 c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 10^n + 1 = 9k$

Montrons que : $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9 ??

$10^{n+1}+1=10^n\times10^1+1=(9k-1)\times10+1=9\times10k-10+1=9\times10k-9=9\times(10k-1)=9\times k'$

Donc : $10^{n+1}+1$ est divisible par 9

Donc : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

3) Cet élève qui affirme : " Donc $P(n)$ et $Q(n)$ sont vraies pour tout entier naturel n ".

Il commet une erreur : en effet : Pour n=0 : $10^0+1=1+1=2$ n'est pas divisible par 9

La proposition : « $\forall n\in\mathbb{N}\ 10^n+1$ est divisible par 9 » est fausse bien que : $Q(n)\Rightarrow Q(n+1)$

4) Démontrons que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

1étapes : l'initialisation : Pour n =0 nous avons : $10^0-1=1-1=0$ et 0 est divisible par 9

Donc $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : soit : $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,10^n-1=9k$

Montrons que : $10^{n+1}-1$ est divisible par 9 ??

$10^{n+1}-1=10^n\times10^1-1=(9k+1)\times10-1=9\times10k+10-1=9\times10k+9=9\times(10k+1)=9\times k'$

Donc : $10^{n+1}-1$ est divisible par 9 ; donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : « $\forall n\in\mathbb{N}\ 10^n-1$ est divisible par 9 » (vraie)

5) Démontrer que $Q(n)$ est fausse pour tout entier naturel n.

Supposons que : $\exists n\in\mathbb{N}\ et\ \exists k\in\mathbb{N}\ /\ 10^n+1=9k$ ❶

Or on a montré que : $\exists k'\in\mathbb{N}\ /\ 10^n-1=9k'$ ❷

❶-❷ $\Rightarrow\ \exists k;k'\in\mathbb{N}\ 2=9(k-k')=9k''$ avec $k''=k-k'\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ 9 divise 2 absurdes ou contradiction avec 9 ne divise pas 2

Donc : $Q(n)$ est fausse pour tout entier naturel n.

Attention : Erreur classique dans les récurrences ne pas commettre il ne faut pas oublier 1étapes : l'initialisation

Exercice15 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $4^{3n}-4^n$ est divisible par 5

Solution : 1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $4^{3n}-4^n=4^0-4^0=1-1=0$ et 0 est divisible par 5

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^{3n}-4^n=5k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,4^{3n+3}-4^{n+1}=5k'$??

$$4^{3n+3}-4^{n+1}=4^3\times4^{3n}-4^1\times4^n=65\times4^{3n}-4\times4^n=(65-1)\times4^{3n}-(5-1)\times4^n=5\times13\times4^{3n}-4^{3n}-5\times4^n+4^n$$

$$=5\times13\times4^{3n}-5\times4^n-\left(4^{3n}-4^n\right)=5\times13\times4^{3n}-5\times4^n-5k$$

$4^{3n+3}-4^{n+1}=5\times\left(13\times4^{3n}-4^n-k\right)=5\times k'$ avec $k'=13\times4^{3n}-4^n-k\in\mathbb{N}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : : $\forall n\in\mathbb{N}\ 4^{3n}-4^n$ est divisible par 5

Exercice16 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$.

Solution : Notons P(n) la proposition : "$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$"

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons :

$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^1(2\times1+1)=-3$ et $(-1)^1(1+1)-1=-2-1=-3$

Donc P (1) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^{n+1}(n+2)-1$??

Remarque : $(-1)^{n+1}=(-1)^n\times(-1)^1=-(-1)^n$

On a : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)+(-1)^{n+1}(2n+2+1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

Donc : $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1+(-1)^{n+1}(2n+3)$

$S_{n+1}=(-1)^{n+1}\times(-1)(n+1)+(-1)^{n+1}(2n+3)-1=(-1)^{n+1}(-n-1+2n+3)-1$

$S_{n+1}=(-1)^{n+1}(n+2)-1$ C'est-à-dire : P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(2k+1)=(-1)^n(n+1)-1$

Exercice17 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $f(1)=0$ et $f(n+1)=\dfrac{5f(n)-3}{3f(n)-1}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad f(n)\neq1$

2)On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ g(n)=\dfrac{f(n)+1}{f(n)-1}$

a) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $g(n+1)-g(n)=3$

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $g(n)=3n-2$

c) Déterminer : $f(n)$ en fonction de n ; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Solution : 1) Montrons par récurrence que : $P(n)$ « $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad f(n)\neq1$ »

1étapes : l'initialisation : Pour n = 1 nous avons : $f(1)=0\neq1$

Donc $P(1)$ est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit : $n\in\mathbb{N}^*$

Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $f(n)\neq1$

Montrons que : $f(n+1)\neq1$ "??

On a : $f(n+1)-1=\dfrac{5f(n)-3}{3f(n)-1}-1=\dfrac{5f(n)-3-3f(n)+1}{3f(n)-1}=\dfrac{2f(n)-2}{3f(n)-1}=\dfrac{2(f(n)-1)}{3f(n)-1}$

et puisque : $f(n)\neq1$ alors : $f(n)-1\neq0$ et $f(n+1)-1\neq0$ par suite : $f(n+1)\neq1$

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : « $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) \neq 1$ »

2)On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; g(n) = \dfrac{f(n)+1}{f(n)-1}$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1) - g(n) = 3$

Soit : $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g(n+1)-g(n) = \frac{f(n+1)+1}{f(n+1)-1} - g(n) = \frac{\dfrac{5f(n)-3}{3f(n)-1}+1}{\dfrac{5f(n)-3}{3f(n)-1}-1} - g(n) = \frac{\dfrac{5f(n)-3+3f(n)-1}{3f(n)-1}}{\dfrac{5f(n)-3-3f(n)+1}{3f(n)-1}} - \frac{f(n)+1}{f(n)-1}$$

$$g(n+1)-g(n) = \frac{\dfrac{8f(n)-4}{3f(n)-1}}{\dfrac{2f(n)-2}{3f(n)-1}} - \frac{f(n)+1}{f(n)-1} = \frac{8f(n)-4}{2(f(n)-1)} - \frac{f(n)+1}{f(n)-1} = \frac{8f(n)-4-2f(n)-2}{2(f(n)-1)} = \frac{6(f(n)-3)}{2(f(n)-1)} = 3$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1) - g(n) = 3$

b) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $g(n) = 3n - 2$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g(n+1) - g(n) = 3$

(1) Pour : $n = 1$; $g(2) - g(1) = 3$

(2) Pour : $n = 2$; $g(3) - g(2) = 3$

…

…

$(n-2)$ Pour : $n-2$; $g(n-1) - g(n-2) = 3$

$(n-1)$ Pour : $n-1$; $g(n) - g(n-1) = 3$

La des égalités membre a membre donne : $g(n) - g(1) = \underbrace{3+3+3+...+3}_{n-1 \text{ fois}} = 3(n-1)$

Donc : $g(n) = 3(n-1) - g(1)$ et $g(1) = \dfrac{f(1)+1}{f(1)-1} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$

Donc : $g(n) = 3(n-1) + 1 = 3n - 3 + 1 = 3n - 2$

2)On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; g(n) = \dfrac{f(n)+1}{f(n)-1} \Leftrightarrow g(n)(f(n)-1) = f(n)+1 \Leftrightarrow g(n)f(n) - g(n) = f(n)+1$

$\Leftrightarrow f(n)(g(n)-1) = 1 + g(n)$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) - 1 \neq 0$ car si : $\exists n \in \mathbb{N}^* : g(n) - 1 = 0$

$g(n) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(n)+1}{f(n)-1} = 1 \Leftrightarrow f(n)+1 = f(n)-1 \Leftrightarrow 1 = -1$ (Absurde)

$$f(n) = \frac{1+g(n)}{g(n)-1} = \frac{1+3n-2}{3n-2-1} = \boxed{\frac{3n-1}{3n-3}} \; ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien