1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°1 : *LOGIQUE ET RAISONNEMENTS*

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) $P_1 : "\frac{17}{5} = 3,4"$ 2) $P_2 : "\frac{17}{3} = 5,67"$ 3) $P_3 : "\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}"$

4) $P_4 : "\sqrt{7}^2 = 14"$ 5) $P_5 : "\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = 2-\sqrt{2}"$ 6) $P_6 : "\sqrt{3} < 2"$

7) $P_7 : "\sqrt{16+9} = \sqrt{16}+\sqrt{9}"$ 8) $P_8 : "\left|1-\sqrt{3}\right| = 1+\sqrt{3}"$ 9) $P_9 : "\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 1"$

10) $P_{10} : "\sin\frac{3\pi}{4} = 1,71"$ 11) $P_{11} : "\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}"$ 12) P_{12} : "$\frac{1}{3}$ est un nombre décimal "

Solution : 1) $P_1 : "\frac{17}{5} = 3,4"$; P_1 : est vraie et $\overline{P_1} : "\frac{17}{5} \neq 3,4"$

2) $P_2 : "\frac{17}{3} = 5,67"$ P_2 : est fausse et $\overline{P_2} : "\frac{17}{3} \neq 5,67"$

3) $P_3 : "\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}"$: $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

P_3 : est vraie et $\overline{P_3} : "\frac{1}{\sqrt{5}} \neq \frac{\sqrt{5}}{5}"$

4) $P_4 : "\sqrt{7}^2 = 14"$; $"\sqrt{7}^2 = 7 \neq 14"$

P_4 : est fausse et $\overline{P_4} : "\sqrt{7}^2 \neq 14"$

5) P_5 : $"\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = 2-\sqrt{2}"$

$"\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2}^2-\sqrt{2} = 2-\sqrt{2}"$ P_5 : est vraie

$\overline{P_5}$: $"\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \neq 2-\sqrt{2}"$ est fausse

6) $P_6 : "\sqrt{3} < 2"$

On a : $\sqrt{3}^2 = 3$ et $2^2 = 4$ donc : P_6 : $"\sqrt{3} < 2"$ est vraie

$\overline{P_6} : "\sqrt{3} \geq 2"$ est fausse

7) $P_7 : "\sqrt{16+9} = \sqrt{16}+\sqrt{9}"$

On a : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$

Donc : $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16}+\sqrt{9}$

Par suite : $P_7 : "\sqrt{16+9} = \sqrt{16}+\sqrt{9}"$ est fausse

$\overline{P_7} : "\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16}+\sqrt{9}"$ est vraie

8) $P_8 : "\left|1-\sqrt{3}\right| = 1+\sqrt{3}"$

$\left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-1$ car $1-\sqrt{3}$ est négatif

Donc : $\left|1-\sqrt{3}\right| \neq 1+\sqrt{3}$

Par suite : $P_8 : "\left|1-\sqrt{3}\right| = 1+\sqrt{3}"$ est fausse

$\overline{P_8} : "\left|1-\sqrt{3}\right| \neq 1+\sqrt{3}"$ est vraie

9) $P_9 : "\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 1"$

On a : $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=5-\sqrt{6}$

Donc : $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2\neq 1$

Par suite : P_9 : "$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=1$" est fausse

$\overline{P_9}$: "$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2\neq 1$" est vraie

10) P_{10} : "$\sin\frac{3\pi}{4}=1,71$"

$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (voir le cercle trigonométrique)

et puisque : $\sqrt{2}\prec 2$ alors : $\frac{\sqrt{2}}{2}\prec\frac{2}{2}=1$

Donc : $\sin\frac{3\pi}{4}\neq 1,71$

Par suite : P_{10} : "$\sin\frac{3\pi}{4}=1,71$" est fausse

$\overline{P_{10}}$: "$\sin\frac{3\pi}{4}\neq 1,71$" est vraie

11) P_{11} : "$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$"

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Par suite : P_{11} : "$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$" est vraie

P_{11} : "$\frac{1}{\sqrt{3}+1}\neq\frac{\sqrt{3}-1}{2}$" est fausse

12) P_{12} : "$\frac{1}{3}$ est un nombre décimal "

$\frac{1}{3}=0,333333.....$ a un développement décimal illimité

Par suite : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

Donc : P_{12} : "$\frac{1}{3}$ est un nombre décimal " est fausse

$\overline{P_{12}}$: "$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal" est vraie

Exercice2 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P: "$\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0$"

2) P: "$\exists x\in\mathbb{R}/x^2-2=0$"

3) P: $\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$""

4) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\leq\cos x\leq 1$

5) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n\prec m$

6) P: est pair$\left(\exists n\in\mathbb{N}\right)$ $2n+1$

7) $P:\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\sqrt{n}\in\mathbb{N}$

8) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):y-x>0$

9) $P:\left(\exists! x\in\mathbb{R}\right);2x+4=0$

10) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x+y\leq 1\Rightarrow x^2+y^2\leq 2$

Solution : 1) $\overline{P}$ $"\exists x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 0"$

$"\exists 0 \in \mathbb{R} / 0^2 \leq 0"$ donc : $\overline{P}:"\exists x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 0"$ est vraie

Par suite P:est fausse

2) $\overline{P}$ $"\forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 \neq 0"$

$"\exists x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \; et \; \sqrt{2}^2 - 2 = 0"$

Donc : P:est vraie

3) $P: \forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}"$

$\overline{P}$ $\exists n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}"$

$\exists 1 \in \mathbb{N} / \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}"$ Donc : $\overline{P}$ est vraie

Et par suite P:est fausse

4) $P: (\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$

$\overline{P}: (\exists x \in \mathbb{R}); \cos x \succ 1$ ou $\cos x \prec -1$

On a P:est vraie

5) $P: (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}): n \prec m$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $(\exists m = n+1 \in \mathbb{N}): n \prec n+1$

Donc : P:est vraie

$\overline{P}$ $(\exists n \in \mathbb{N}); (\forall m \in \mathbb{N}): n \geq m$

6) $P: (\exists n \in \mathbb{N})$ $2n+1$ est pair

$\overline{P}: (\forall n \in \mathbb{N})$: $2n+1$ est impair

$\overline{P}$ est vraie

Donc : P:est fausse

7) $P:$ $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

$\overline{P}$: $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ et on a : $(\exists 2 \in \mathbb{N}); \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

Donc : $\overline{P}$ est vraie

Et par suite P:est fausse

8) $P: (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}): y - x > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $(\exists y = x+1 \in \mathbb{R}): y - x > 0$

Donc : P:est vraie

$\overline{P}$ $:(\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}): y - x \leq 0$

9) $P: (\exists! x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$

$2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$

$(\exists! x = -2 \in \mathbb{R}); 2 \times (-2) + 4 = 0$

Donc : P:est vraie

$\overline{P}$ $(\forall x \in \mathbb{R}); 2x + 4 \neq 0$ ou $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x \neq y \; et \; 2x + 4 = 2x + 4 = 0$

10) $P: (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): x + y \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2$

$\overline{P}: (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x + y \leq 1 \; et \; x^2 + y^2 \succ 2$

$(\exists x = -1 \in \mathbb{R})(\exists y = -2 \in \mathbb{R}): -1 + (-2) \leq 1 \; et \; (-1)^2 + (-2)^2 \succ 2$

Donc : La proposition $\overline{P}$ est vraie par suite : P est fausse

Exercice3 : Compléter, lorsque c'est possible avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les Enoncés suivants soient vrais.

1) $P_1 : ......x \in \mathbb{R}; (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 2) $P_2 : ......x \in \mathbb{R}; x^2 + 3x + 2 = 0$

3) $P_3 : ......x \in \mathbb{R}; 2x + 1 = 0$ 4) $P_4 : ......x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Solution : 1) $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}; (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

2) $P_2 : \exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 3x + 2 = 0$

3) $P_3 : \exists x \in \mathbb{R}; 2x + 1 = 0$

4) $P_4 : \exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x + 3 \neq 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Exercice4 : Montrer que : les assertions : $P \wedge \overline{Q}$ et $\overline{P \Rightarrow Q}$ sont équivalentes

Solution : Méthode1 :

A l'aide de la méthode des tables de vérité :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$	$P \wedge \overline{Q}$
V	V	F	F	V	**F**	**F**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**F**	**F**
F	F	V	V	V	**F**	**F**

Donc : $P \wedge \overline{Q}$ et $\overline{P \Rightarrow Q}$ sont équivalentes

Méthode2 : $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

Donc : les assertions : $P \wedge \overline{Q}$ et $\overline{P \Rightarrow Q}$ sont équivalentes

Exercice5 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1) P : « $\left(\exists x \in \mathbb{R}^{*+}\right); x^2 \prec x \ ou \ x + \frac{1}{x} \prec 0$ »

2) Q : « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Q}) / x = y \ ou \ x \succ y$ »

3) R : « $(\exists y \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{R}) / x = y \ ou \ x \succ y$ »

Solution : 1) P : « $\left(\exists x \in \mathbb{R}^{+}\right); x^2 \prec x \ ou \ x + \frac{1}{x} \prec 0$ »

On a : "$\left(\exists x \in \mathbb{R}^{*+}\right); x^2 \leq x$" est vraie : il suffit de prendre : $x = \frac{1}{2}$ et on trouve : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \prec \frac{1}{2}$ (vraie)

Donc : P : « $\left(\exists x \in \mathbb{R}^{*+}\right); x^2 \leq x \ ou \ x + \frac{1}{x} \prec 0$ » est une proposition vraie (car il Ya une disjonction :OU)

$\overline{P}$: « $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); x^2 \geq x \ et \ x + \frac{1}{x} \geq 0$ »

2) Q : « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Q}) / x = y \ ou \ x \succ y$ »

Soit : $x \in \mathbb{R}$: on peut toujours trouver un nombre entiers relatif donc rationnel y inférieur ou égal a y

Il suffit de prendre : $E(x) \in \mathbb{Q}$

$\overline{Q}$: « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{Q}) / x \neq y \ et \ x \leq y$ »

3) $\overline{R}$: « $(\forall y \in \mathbb{Q})(\exists x \in \mathbb{R}) / x \neq y \ et \ x \leq y$ »

Soit : $y \in \mathbb{Q}$ on prend : $x = y - 1 \in \mathbb{R}$: $x \neq y \ et \ x \leq y$

Alors la proposition $\overline{R}$: est vraie et par suite : R Fausse

Exercice6 : Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :
1) Le carré de tout réel est positif.
2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5) Il existe un entier multiple de tous les autres.
6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :1) $"\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0"$
2) $"\exists x \in \mathbb{R}, x \succ x^2"$
3) $(\forall n \in \mathbb{N});(\exists m \in \mathbb{N}): n \prec m$
4) $(\exists x \in \mathbb{R}):(\forall n \in \mathbb{Z});(\forall m \in \mathbb{N}^*): x \neq \frac{n}{m}$
5) $(\exists n \in \mathbb{N});(\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}): n = m \times k$
6) $(\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}) / x \prec y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} / x \prec z \prec y$

Exercice7 : Montrer à l'aide d'un contre-exemple que les propositions suivantes est fausses :
1) $P:"(\forall x \in]0;1[);\frac{3}{x(1-x^2)} \prec 0"$
2) « $Q:(\forall n \in \mathbb{N}); n^2+n+1$ est un nombre premier »
3) « $R:(\forall x \in \mathbb{R}); 3\cos x \neq 2\sin^2 x$ »

Solution :1) $\overline{P}:"(\exists x \in]0;1[);\frac{3}{x(1-x^2)} \geq 0"$

En posant : $x = \frac{1}{2} \in]0;1[$ on aura : $\frac{3}{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{3}{\frac{3}{8}} = 8 \geq 0$

Donc : $\left(\exists x = \frac{1}{2} \in]0;1[\right) / \frac{3}{x(1-x^2)} \geq 0$

Donc : La proposition $\overline{P}$: est vraie
Par suite : P est fausse
2) « $\overline{Q}:(\exists n \in \mathbb{N}); n^2+n+1$ n'est pas un nombre premier »
$(\exists n = 4 \in \mathbb{N}); 4^2+4+1 = 21 = 3\times 7$ N'est pas un nombre premier

Donc : La proposition $\overline{Q}$: est vraie
Par suite : Q est fausse
3) « $\overline{R}:(\exists x \in \mathbb{R}); 3\cos x = 2\sin^2 x$ »
$\left(\exists x = \frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}\right); 3\cos\frac{\pi}{3} = 2\sin^2\frac{\pi}{3}$

Donc : La proposition $\overline{R}$: est vraie
Par suite : R est fausse

Exercice8 : 2) Soit f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $(\forall x \in \mathbb{R}): f(x) = x^2+6x-7$

On considère la proposition suivante : P : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2): x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

1) Ecrire la négation de P

2) Calculer : $f(1)$ et $f(-7)$

3) En déduire la valeur de vérité de la proposition P

4) Ecrire la contraposé de P et donner sa valeur de vérité

Solution : 1) Remarque : "$non(U \Rightarrow V)$" est "U et $non(V)$"

$\overline{P}$ $:(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2): x\neq y$ et $f(x)=f(y)$

2) $f(1)=1^2+6\times1-7=7-7=0$ et $f(-7)=(-7)^2+6\times(-7)-7=49-42-7=0$

3) On a : $f(1)=0$ et $f(-7)=0$

Donc $:(\exists(1;-7)\in\mathbb{R}^2): 1\neq -7$ et $f(1)=f(-7)$

Donc : $\overline{P}$:est vraie

Par suite : P est une proposition fausse

4) la contraposé de P est : $:(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2): f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Puisque : P est une proposition fausse alors la contraposé de P est aussi fausse

Exercice9 : 1) Montrer que : $x\succ 2$ et $y\geq\frac{1}{3}\Rightarrow 0\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\prec\frac{7}{2}$

2) $x\in\mathbb{R}^+$ Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $|x-1|\leq 2\Rightarrow |x^2+x-2|\leq 10$

4) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $|x-2|\leq 1\Rightarrow \left|\frac{2x+3}{x+2}\right|\leq 3$

Solution : 1) Montrons que : $x\succ 2$ et $y\geq\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\prec\frac{7}{2}$

On a : $x\succ 2$ et $y\geq\frac{1}{3}\Rightarrow 0\leq\frac{1}{x}\prec\frac{1}{2}$ et $0\leq\frac{1}{y}\leq 3$

$\Rightarrow 0\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\prec\frac{1}{2}+3\Rightarrow 0\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\prec\frac{7}{2}$

Donc : $x\succ 2$ et $y\geq\frac{1}{3}\Rightarrow 0\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\prec\frac{7}{2}$

2) $\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})=1$

$\Rightarrow 1+(\sqrt{x})^2=1\Rightarrow 1+x=1\Rightarrow x=0$

3) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $|x-1|\leq 2\Rightarrow|x^2+x-2|\leq 10$

Soit : $x\in\mathbb{R}$; Supposons que : $|x-1|\leq 2$

Et montrons que : $|x^2+x-2|\leq 10$

On a : $x^2+x-2=(x-1)(x+1)+x-1=(x-1)(x+2)$

Par suite : $|x^2+x-2|=|(x-1)(x+2)|=|x-1||x+2|$

Comme : $|x-1|\leq 2$ alors : $-2\leq x-1\leq 2$

Alors : $1\leq x+2\leq 5$ et donc : $|x+2|\leq 5$

or : $|x-1|\leq 2$ donc : $|x^2+x-2|=|x-1||x+2|\leq 2\times 5$

D'où : $|x^2+x-2|\leq 10$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x-1| \le 2 \Rightarrow |x^2+x-2| \le 10$

4) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x-2| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{2x+3}{x+2}\right| \le 3$

Soit : $x \in \mathbb{R}$; Supposons que : $|x-2| \le 1$

Et montrons que : $\left|\frac{2x+3}{x+2}\right| \le 3$

On a : $|x-2| \le 1 \Rightarrow -1 \le x-2 \le 1$

$\Rightarrow 1 \le x \le 3$

$\Rightarrow 5 \le 2x+3 \le 9$ et $3 \le x+2 \le 5$

$\Rightarrow 5 \le 2x+3 \le 9$ et $\frac{1}{5} \le \frac{1}{x+2} \le \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{5} \times 5 \le (2x+3) \times \frac{1}{x+2} \le \frac{1}{3} \times 9$

$\Rightarrow 1 \le \frac{2x+3}{x+2} \le 3$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x-2| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{2x+3}{x+2}\right| \le 3$

Exercice10 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\forall y \in \mathbb{R}$: $x^2+y^2+xy=0 \Leftrightarrow x=y=0$

Solution : Montrons l'équivalence en raisonnant par double implication : Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftarrow$) Supposons : $x=y=0$ et Montrons que : $x^2+y^2+xy=0$

On a : $0^2+0^2+0\times 0=0$ Donc : $x^2+y^2+xy=0$

$\Rightarrow$)Supposons : $x^2+y^2+xy=0$ et Montrons que : $x=y=0$

On a : $x^2+y^2+xy=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+xy+xy=xy \\ x^2+y^2+xy-xy=-xy \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2xy=xy \\ x^2+y^2=-xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2=xy \\ x^2+y^2=-xy \end{cases}$ Or : $(x+y)^2 \ge 0$ et $x^2+y^2 \ge 0$

Donc : $xy \ge 0$ *et* $xy \le 0$ par suite : $xy=0$

Donc : $x^2+y^2=0$ Donc : $x^2=-y^2$

Or : $x^2 \ge 0$ et puisque $x^2=-y^2$ on a aussi : $x^2 \le 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \ge 0 \\ x^2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$ et comme : $x^2+y^2=0$

Alors : $y^2=0$ c'est-à-dire : $y=0$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$

$x^2+y^2+xy=0 \Rightarrow x=y=0$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$ $x^2+y^2+xy=0 \Leftrightarrow x=y=0$

Exercice11 : Montrer que : $\forall x \ge 2$; $\forall y \ge 3 : 2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}=x+y \Leftrightarrow x=3$ *et* $y=7$.

Solution : Soient : $x \ge 2$ *et* $y \ge 3$

$2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}=x+y \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{x-2}-4\sqrt{y-3}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}^2-2\sqrt{x-2}+1+\sqrt{y-3}^2-2\times 2\sqrt{y-3}+2^2=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-3}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1=0$ *et* $\sqrt{y-3}-2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1$ *et* $\sqrt{y-3}=2 \Leftrightarrow x-2=1$ *et* $y-3=4 \Leftrightarrow x=3$ *et* $y=7$

Exercice12 : Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel,
x et y sont des nombres réels.

1) P : $n\ est\ premier \Rightarrow n=2\ \ ou\ \ n\ est\ impair$

2) Q : $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad et \quad y \neq 0$)

Solution :1) la contraposée de P est :
$n \neq 2\ et\ \ n\ est\ pair \Rightarrow n\ n'est\ \ pas\ premier$

On suppose que : $n \neq 2\ et\ \ n\ est\ pair\ \ n \neq 2\ et\ \ n\ est\ pair \Rightarrow 2\, divise\, n\ et\ n \neq 2$
$\Rightarrow n\ n'est\ \ pas\ premier$

Donc : $n \neq 2\ et\ \ n\ est\ pair \Rightarrow n\ n'est\ \ pas\ premier$

Par contraposition : $n\ est\ premier \Rightarrow n=2\ \ ou\ \ n\ est\ impair$

2) la contraposée de Q est :
$x=0 \quad ou \quad y=0 \Rightarrow xy=0$

Si $x=0 \Rightarrow xy=0$ et si $y=0 \Rightarrow xy=0$

Donc : $x=0 \quad ou \quad y=0 \Rightarrow xy=0$

Par contraposition : $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad et \quad y \neq 0$

<u>Remarque :</u> Passer par la contraposée est souvent intéressant lorsque la négation d'une proposition est plus simple à manipuler que la proposition de départ.

Exercice13 : $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$: Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

Solution : Soient : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow \ x=-8$

On a : $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x+2 = 2(x+5) \Rightarrow x+2 = 2x+10 \Rightarrow x=-8$

Donc : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

Exercice14 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$

2) Montrer que : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$ et $b \neq 2a$

$b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$

3) Montrer que : $\forall (a;b) \in \left(]1;+\infty[\right)^2 \quad a \neq b \Rightarrow a^2 - 2a \neq b^2 - 2b$

Solution : Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition : Montrons que : $\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow 3x = x+1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow 2x = 1$

Alors : Par contraposition : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$

1) Utilisons un Raisonnement par contraposition :

2) Montrons que : $\forall (a;b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$ et $b \neq 2a$: $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{8}a$

Soit $(a;b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$: $\Rightarrow -a+8b=0$

$\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(a+2b) = 2(2a-b) \Rightarrow 3a+6b = 4a-2b \Rightarrow -a+8b=0 \Rightarrow b = \frac{1}{8}a$

3) Montrer que : $\forall(a;b)\in(]1;+\infty[)^2 \quad a\neq b \Rightarrow a^2-2a\neq b^2-2b$

Soit $(a;b)\in(]1;+\infty[)^2$: Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $a^2-2a=b^2-2b\Rightarrow a=b$

$$a^2-2a=b^2-2b\Rightarrow a^2-b^2+2b-2a=0\Rightarrow(a-b)(a+b)-2(a-b)=0\Rightarrow(a-b)(a+b-2)=0$$

$\Rightarrow a-b=0 \ ou\ a+b-2=0$

et comme : $a\in]1;+\infty[$ et $b\in]1;+\infty[$ alors : $a\succ1$ et $b\succ1$ et donc : $a+b\succ2$ par suite : $a+b-2\neq0$

Donc : $a^2-2a=b^2-2b\Rightarrow a=b$

Alors : Par contraposition : $\forall(a;b)\in(]1;+\infty[)^2 \quad a\neq b \Rightarrow a^2-2a\neq b^2-2b$

Exercice15 : 1) Montrer que : $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$; $x+y\geq2\sqrt{xy}$

2) Déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $x+\frac{1}{x}\geq2$

3) Déduire que : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq4$

Solution :1) Nous raisonnons par équivalence

Soit : $(x;y)\in([0;+\infty[)^2$:On a : $x+y\geq2\sqrt{xy}\Leftrightarrow(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2\geq0$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq0$$

Et puisque on a : $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$; $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$ (vraie)

Alors : $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$; $x+y\geq2\sqrt{xy}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$; on a : $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$; $x+y\geq2\sqrt{xy}$

Par exemple on prend : $x \ et \ \frac{1}{x}$ et on applique la proposition :

$$x+\frac{1}{x}\geq2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq2\sqrt{1}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq2$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $x+\frac{1}{x}\geq2$

3) Déduisons que : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq4$

Soit $(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$: on a : $\forall(x;y)\in([0;+\infty[)^2$; $x+y\geq2\sqrt{xy}$

On donc : d'après 1) si on prend : $x=\frac{a^2+1}{b}$ et $y=\frac{b^2+1}{a}$

On aura : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq2\sqrt{\frac{a^2+1}{b}\times\frac{b^2+1}{a}}$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}}$

On donc : d'après 2) $a+\frac{1}{a}\geq2\Leftrightarrow\frac{a^2+1}{a}\geq2$ et aussi $b+\frac{1}{b}\geq2\Leftrightarrow\frac{b^2+1}{b}\geq2$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}}\geq2\sqrt{2\times2}$

Donc : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq4$

Par suite : $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$; $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

Exercice16 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}>1$

Solution : Nous raisonnons par équivalence

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}>1\Leftrightarrow\left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\right)^2>1^2\Leftrightarrow(2n+1)^2>4n(n+1)$

$\Leftrightarrow 4n^2+4n+1>4n^2+4n\Leftrightarrow 1>0$

Et puisque on a : $1>0$ est une proposition vraie

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}>1$

Exercice17 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\frac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$.

Solution : On va Opérer par disjonction de cas i.e. déterminer un énoncé Q tel que :
Q ⇒ P et non(Q) ⇒ P soient vraies
Soit $n\in\mathbb{N}$

Si n est pair alors on peut écrire $n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$ et alors : $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2k(2k+1)}{2}=k(2k+1)\in\mathbb{N}$

Si n est impair alors on peut écrire $n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$ et alors :
$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}=(2k+1)(k+1)\in\mathbb{N}$

Dans les deux cas : $\frac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\frac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$.

Exercice18 : Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Solution : Remarque : Raisonnement par Disjonction des cas : Pour montrer l'implication :
« (P_1 ou P_2 ou ⋯ ou P_n) ⇒Q »,
On montre successivement les différentes implications « P_k ⇒Q », pour chaque k ∈ [[1 ; n]].
Soit $n\in\mathbb{N}$ on a 3 cas possibles seulement
Pour n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

<u>1cas :</u> $n=3k$

$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)=3k'$ Avec $k'=k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>2cas :</u> $n=3k+1$ $n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$n(n+1)(n+2)=3(3k+1)(3k+2)(k+1)=3k'$

Avec $k'=(3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>3cas :</u> $n=3k+2$

$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=3(3k+2)(k+1)(3k+4)=3k'$

Avec $k'=(3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$; $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Exercice19 : 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$.

2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}-x \succ 0$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

<u>Premier cas :</u> $x \geq 0$ Alors $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 \succ 0$

Donc $\sqrt{x^2+1} \succ 0$ et on a $x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

<u>Deuxième cas :</u> $x \leq 0$. On a $x^2+1 \succ x^2$

Donc $\sqrt{x^2+1} \succ \sqrt{x^2}$ par suite : $\sqrt{x^2+1} \succ |x|$ or $x \leq 0$

Alors on a : $\sqrt{x^2+1} \succ -x$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

2) Soit : $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \succ 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}-x \succ 0$ Car : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

Exercice20 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt{1+x^2} \neq x$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $\exists x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt{1+x^2} = x$

$\exists x \in \mathbb{R}^+$; $\sqrt{1+x^2} = x \Rightarrow \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow 1+x^2 = x^2 \Rightarrow 1 = 0$

Nous obtenons une contradiction
Donc notre supposition est fausse

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt{1+x^2} \neq x$

Exercice21 : Soient $(x;y) \in \mathbb{Q}^2$ tels que : $2xy+x^2+5y^2=16$

Montrer que : $x \neq y$

Solution : Soient $(x;y) \in \mathbb{Q}^2$ tels que : $2xy+x^2+5y^2=16$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que : $x = y$

Comme on a : $2xy+x^2+5y^2=16$ et $x = y$ Alors : $2xx+x^2+5x^2=16$

Donc : $\Rightarrow 8x^2=16 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$ contradiction car $x \in \mathbb{Q}$ et $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Par suite : $x \neq y$

Exercice22 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $4\cos x \neq x^2-4x+12$

Solution : ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\exists x \in \mathbb{R}$; $4\cos x = x^2-4x+12$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}$; $\cos x = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 3$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}$; $\cos x = \left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 - 2\times\dfrac{1}{2}x\times 1 + 1^2 + 2$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}$; $\cos x = \left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2+2$ Or : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2 \geq 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2+2 \geq 2$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ $\cos x \geq 2$: C'est une contradiction car on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $4\cos x \neq x^2-4x+12$

Exercice23 : 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\frac{n+2}{n+3}\notin\mathbb{N}$

2)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3}\notin\mathbb{N}$

Solution : 1) ® Méthode : Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Méthode1 : Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{n+2}{n+3}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{n+2}{n+3}=m\Rightarrow n+2=m(n+3)\Rightarrow n+3/n+2$

et comme : $n+3\succ n+2$

C'est une contradiction car si $n+3/n+2$

Alors : $n+3\le n+2$

Ceci signifie que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\frac{n+2}{n+3}\notin\mathbb{N}$

Méthode2 : direct : On a : $n\in\mathbb{N}$ donc $n+1\prec n+2$

Donc $0\prec\frac{n+1}{n+2}\prec 1$

Donc : $\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{16n^2+8n+3}\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists m\in\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{16n^2+8n+3}=m$

$\sqrt{16n^2+8n+3}=m\Rightarrow 16n^2+8n+3=m^2$

et comme : $16n^2+8n+3=\left((4n)^2+2\times 4n+1\right)+2=(4n+1)^2+2$

et comme : $(4n+1)^2\prec(4n+1)^2+2$ alors : $(4n+1)^2\prec m^2$

Calculons $(4n+2)^2$: $(4n+2)^2=(4n)^2+2\times4\times2n+4=16n^2+16n+4$

Comparons : $(4n+2)^2$ et m^2 : $(4n+2)^2-m^2=16n^2+16n+4-16n^2-8n-3=8n+1\succ 0$

Alors : $(4n+1)^2\prec m^2\prec(4n+2)^2$

Alors : $4n+1\prec m\prec 4n+2$ et $m\in\mathbb{N}$

C'est une contradiction car on ne peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : $4n+1$ et $4n+2$

Ceci signifie que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3}\notin\mathbb{N}$

Exercice24 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2-|x-2|-4=0$

Solution : Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

On va Opérer par disjonction de cas :

Si $x\ge 2$ alors $x-2\ge 0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$ c'est-à-dire : $x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2=0$: a = 1, b = -1 et c = - 2

Donc Δ = b² – 4ac = (-1)² – 4 x 1 x (-2) = 9.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times1}=-1\notin[2;+\infty[$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times1}=2$ Donc : $S_1=\{2\}$

Si $x \prec 2$ alors $x-2 \leq 0$ donc : $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2 + (x-2) - 4 = 0$ c'est à dire : $x^2 + x - 2 - 4 = 0$ Signifie : $x^2 + x - 6 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$: a = 1, b = 1 et c = - 6

Donc :Δ = $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 1} = -3$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 1} = 2$ Mais : $x_2 = 2 \notin]-\infty;2[$ Donc : $S_2 = \{-3\}$

Par suite : $S = S_1 \cup S_2 = \{-3;2\}$.

Exercice25 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt{x^2+1} = 2x$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Solution : Methode1 : $x \in S \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}^2 = (2x)^2$

$\Rightarrow x^2+1 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \, ou x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Remarque : On ne peut pas affirmer que : $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de l'équation

Et inversement on a : $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \neq -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{3} \notin S$ et on a : $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Methode2 : $x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x$ et $x \geq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}^2 = (2x)^2$

$\Longleftrightarrow x^2+1 = 4x^2$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$ et $x \geq 0 \Longleftrightarrow$ ($x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$) et $x \geq 0$

Donc : $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exercice26 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante (I): $\sqrt{x^2-5x+6} \geq x+4$

Solution : On cherche l'ensemble de définition de l'Inéquation (I)

$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 \geq 0\}$

$x^2 - 5x + 6$: $\Delta = 25 - 4\times 6 = 1 \succ 0$: $x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

$D =]-\infty;2] \cup [3;+\infty[$

Soit $x \in]-\infty;2] \cup [3;+\infty[$ et S l'ensemble des solutions de (I)

$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+6} \geq x+4$

$x+4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-4]$

1 cas : si $x \in]-\infty;-4] \cap (]-\infty;2] \cup [3;+\infty[) =]-\infty;-4]$

L'Inéquation est vraie pour tout $x \in]-\infty;-4]$ car $x+4 \leq 0$ et $\sqrt{x^2-5x+6} \geq 0$

Donc $S_1 =]-\infty;-4]$

2 cas : si $x \in]-4;+\infty[\cap (]-\infty;2] \cup [3;+\infty[) =]-4;2] \cup [3;+\infty[$ alors : $x+4 \succ 0$

$x \in S_2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+6} \geq x+4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2 \geq (x+4)^2$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6 \geq x^2+8x+16 \Leftrightarrow -13x \geq 10 \Leftrightarrow x \leq -\frac{10}{13} \quad \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-\frac{10}{13}\right]$

Donc $S_2 = \left]-\infty;-\frac{10}{13}\right] \cap (]-4;2] \cup [3;+\infty[) = \left]-4;-\frac{10}{13}\right]$

Donc : $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty;-4] \cup \left]-4;-\frac{10}{13}\right] = \left]-\infty;-\frac{10}{13}\right]$

Exercice27 : Montrer que : 1) $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1+2+3+...+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*; \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

Solution :1) Notons P(n) La proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$; $3^n \geq 1+2n$. Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $3^0 \geq 1+2\times 0$ donc $1 \geq 1$.

Donc P (0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $3^n \geq 1+2n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $3^{n+1} \geq 1+2(n+1)$?? c'est-à-dire Montrons que $3^{n+1} \geq 2n+3$??

On a : $3^n \geq 1+2n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $3^n \times 3 \geq 3 \times (1+2n)$

Donc : $3^{n+1} \geq 6n+3$

Or on remarque que : $6n+3 \geq 2n+3$ (on pourra faire la différence $(6n+3)-(2n+3) = 4n \geq 0$)

Donc : on a $6n+3 \geq 2n+3$ et $3^{n+1} \geq 6n+3$ donc $3^{n+1} \geq 2n+3$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

2) Notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ donc $1 = 1$.

Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+3+...+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$??

On a : $1+2+3+...+n+(n+1) = (1+2+3+...+n)+(n+1)$

Et on a d'après l'hypothèse de récurrence : $1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$

Donc : $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*;1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

3) Notons P(n) La proposition
Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=1 nous avons $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$

Donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

L'hérédité : 2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$??

On a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)^2$

et on a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)$

$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$ Et on remarque que : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

Donc : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

4) Montrons que : $\exists k\in\mathbb{N}/4^n+6n-1=9k$
1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $4^0+6\times0-1=0$ est un multiple de 9
Donc P (0) est vraie.
L'hérédité : 2étapes : Soit $n\in\mathbb{N}$
Supposons que P(n) soit vraie
C'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/4^n+6n-1=9k$ donc $4^n=9k-6n+1$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{n+1}+6(n+1)-1=9k'$??

$4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times4^n+6n+6-1=4\times(9k-6n+1)+6n+6-1=36k+4-24n+6n+6-1$

$=36k+9-18n=9(4k+1-2n)=9k'$ avec $k'=4k+1-2n$

Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$; 4^n+6n-1 est divisible par 9

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien