1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°9 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.

1) Monter que : $A\cap B=A\cap C \Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

2) Monter que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases} \Leftrightarrow A\subset B$

3)Monter que : $A\cup B=A\cap C \Leftrightarrow B\subset A\subset C$

4)Monter que : $A=B \Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

Exercice2 : Soient A ; B ; C des parties d'un Ensemble E

1) Que pensez-vous de l'implication : $A\cup B\not\subset C \Rightarrow (A\not\subset C$ ou $B\not\subset C)$? Justifiez (On pourra utiliser la contraposée).

2) On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A\cup B\subset A\cup C$ et $A\cap B\subset A\cap C$.
Montrer que $B\subset C$.

Exercice3 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Vérifiant : $E=A\cup B$ et $A\cap C\subset B$ et $B\cap C\subset A$

Monter que : $C\subset A\cap B$

Exercice4 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $A\cup B=B\cap C$

Exercice5 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x^2-2x+6}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$; $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/|2x-1|\le\frac{5}{2}\right\}$ et $C=\left\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/x^2-4y^2=12\right\}$

Exercice6 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2 \end{array}$

Déterminer : $f^{-1}(B)$ avec $B=[-1;4]$

Exercice7 : Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

1) $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2\end{array}$ 2) $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto x^2\end{array}$

3) $h:\begin{array}{l}[0;1]\to[0;2] \\ x\mapsto x^2\end{array}$ 4) $k:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x+x^3\end{array}$

Exercice8 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}:]0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\end{array}$; Montrer que : f est injective

Exercice9 : Soit L'application f : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 3x^2-6x+5\end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f([1;+\infty[)$ et $f^{-1}([2;11])$

Exercice10 :1) Montrer que : $\forall x\in[-1;0]$; $1\le 2\sqrt{x+1}-x\le 2$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[-1;0]\to[1;2] \\ x\mapsto 2\sqrt{x+1}-x \end{array}$

a) Vérifier que : $\forall x\in[-1;0]$; $f(x)=2-\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$

b) Montrer que f : est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Exercice11 : Soit l'application : $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}^+\to\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\\ x\mapsto x+\sqrt{x}+\frac{1}{4} \end{array}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h=g\circ f$

2)a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice12 :1) Soient $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$ et $m\in\mathbb{N}-\{0;1\}$; Montrer que : $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\le\frac{1}{2}$.

2) l'application définie par : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}-\{0;1\}\to\mathbb{Q} \\ (n;m)\mapsto n+\frac{1}{m} \end{array}$

a) Montrer que f est injective ? b) f est-elle surjective ?

Exercice13 : Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1) Si les applications $u\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ et $v\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u\circ v\circ u\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.

2) L'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N} \\ (a;b;c)\mapsto 2^a\times 3^b\times 5^c \end{array}$ est une application :

i) bijective

(ii) injective et pas surjective

(iii) surjective et pas injective

(iv) ni surjective ni injective Justifier.

3) Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. L'application $\varphi\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ qui à l'entier $l\in\mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.

i) Bijective

(ii) injective et pas surjective

(iii) surjective et pas injective

(iv) ni surjective ni injective Justifier.

5) Soient $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$ tels que $ad-bc=1$.

Déterminer l'application réciproque de la bijection : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2 \\ (u;v)\mapsto(au+bv+1;cu+dv-1) \end{array}$

Exercice 14 : Soients A ; B deux parties d'un ensemble E Tel que : $A\subset B$

Résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien