1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°9 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.

1) Monter que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

2) Monter que : $\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\ A-C\subset B-C\end{cases}\Leftrightarrow A\subset B$

3)Monter que : $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$

4)Monter que : $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

Solution : 1) Montrons que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

$\Rightarrow)$ On suppose que : $A\cap B=A\cap C$

Montrons que : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

$\subset)$ Montrons que : $A\cap\overline{B}\subset A\cap\overline{C}$

- ✓ Soit $x\in A\cap\overline{B}$ montrons que $x\in A\cap\overline{C}$?

$x\in A\cap\overline{B}\Rightarrow x\notin B$ *et* $x\in A\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A\cap C$

$\Rightarrow x\notin C$ car : $x\in A$

C'est-à-dire : $x\in A\cap\overline{C}$

$\supset)$ De même on Montre que : $A\cap\overline{C}\subset A\cap\overline{B}$

Donc : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Par suite : $A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

$\Leftarrow)$ On suppose que : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Montrons que : $A\cap B=A\cap C$

- ✓ Soit $x\in A\cap B$ montrons que $x\in A\cap C$?

$x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$ *et* $x\in B\Rightarrow x\in A$ *et* $x\notin\overline{B}\Rightarrow x\notin A\cap\overline{B}\Rightarrow x\notin A\cap\overline{C}$

$\Rightarrow x\notin\overline{C}$ car : $x\in A$

$\Rightarrow x\in C$ et $x\in A$

$\Rightarrow x\in A\cap C$

Donc : $A\cap B\subset A\cap C$

- ✓ De même on Montre que : $A\cap C\subset A\cap B$

Par suite : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow A\cap B=A\cap C$

Conclusion : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

2) $\Rightarrow)$ On suppose que : $\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\ A-C\subset B-C\end{cases}$

Montrons que $A\subset B$???

Conseils méthodologiques :

Pour montrer que $A\subset B$, on montre que :

$x\in A\Rightarrow x\in B$

Soit : $x\in A\Rightarrow x\in A-C$ ou $x\in A\cap C$

Car : $A=(A-C)\cup(A\cap C)$

$\Rightarrow x\in B-C$ ou $x\in B\cap C$

$\Rightarrow x\in B$ ou $x\in B$

$\Rightarrow x\in B$

Donc : $A\subset B$

Par suite : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}\Rightarrow A\subset B$

$\Leftarrow$) On suppose que : $A\subset B$

Montrons que : $\begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$???

a) Montrons que : $A\cap C\subset B\cap C$

Soit : $x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \text{ et } x\in C$

$\Rightarrow x\in B \text{ et } x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cap C$

Donc : $A\cap C\subset B\cap C$

b) Montrons que : $A-C\subset B-C$

Soit : $x\in A-C \Rightarrow x\in A \text{ et } x\notin C$

$\Rightarrow x\in B \text{ et } x\notin C$

$\Rightarrow x\in B-C$

Donc : $A-C\subset B-C$

En déduit donc que : $A\subset B\Rightarrow \begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$

Conclusion : $A\subset B\Leftrightarrow \begin{cases} A\cap C\subset B\cap C \\ A-C\subset B-C \end{cases}$

3)Montrons que : $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$

Démontrons par double implication.

<u>Methode1 : Remarque :</u> on a le résultat suivant :

$A\subset A\cup B \text{ et } B\subset A\cup B$

Aussi on a : $A\cap B\subset A \text{ et } A\cap B\subset B$

$\Rightarrow$) On suppose que : $A\cup B=A\cap C$

On a : $A\cup B=A\cap C\Rightarrow A\cup B\subset A$ et $A\cup B\subset C$

$\Rightarrow B\subset A$ et $A\subset C$

$\Rightarrow B\subset A\subset C$

Donc : $A\cup B=A\cap C\Rightarrow B\subset A\subset C$

$\Leftarrow$) On suppose que : $B\subset A\subset C$

On a : $B\subset A\subset C\Rightarrow B\subset A$ et $A\subset C$

$\Rightarrow A\cup B=A$ et $A\cap C=A\Rightarrow A\cup B=A\cap C$

Donc : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

<u>Methode2 : Remarque :</u>

Pour montrer que $A\subset B$, on montre que :

$x\in A\Rightarrow x\in B$

$\Rightarrow$) On suppose que : $A\cup B=A\cap C$

Montrons que : $B\subset A\subset C$?

C'est à dire Montrons que : $B\subset A$ et $A\subset C$

- ✓ Soit $x\in B$ montrons que $x\in A$?

$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap C$

C'est-à-dire : $x\in A$: Ceci signifie que : $B\subset A$ ❶

- ✓ Soit $x\in A$ montrons que $x\in C$?

$x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap C$

C'est-à-dire : $x\in C$: Ceci signifie que : $A\subset C$ ❷

On a : ❶ et ❷ $\Rightarrow B\subset A\subset C$

Donc : $A\cup B=A\cap C\Rightarrow B\subset A\subset C$

$\Leftarrow$) On suppose que : $B \subset A \subset C$

On a : $B \subset A \subset C \Rightarrow B \subset A$ et $A \subset C$

Montrons que : $A \cup B = A \cap C$?

C'est-à-dire : Montrons que :

$A \cup B \subset A \cap C$ et $A \cap C \subset A \cup B$

Montrons que : $A \cup B \subset A \cap C$?

- ✓ Soit $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in A \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow x \in C \text{ ou } x \in C \Rightarrow x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$

C'est-à-dire : $A \cup B \subset A \cap C$ ❶

Montrons que : $A \cap C \subset A \cup B$?

- ✓ Soit $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$

C'est-à-dire : $A \cap C \subset A \cup B$ ❷

On a : ❶ et ❷ $\Rightarrow A \cup B = A \cap C$

4)Démontrons la double implication.

$\Rightarrow$) Évident.

Car : si $A = B$

Alors : $A \cap A = A \cup A = A$

$\Leftarrow$) On suppose que : $A \cap B = A \cup B$

et on montre que : $A = B$

- ✓ Soit $x \in A$ montrons que $x \in B$?

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B$

C'est-à-dire : $x \in B$: Ceci signifie que : $A \subset B$ ①

- ✓ Soit $x \in B$ montrons que $x \in A$?

$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B$

C'est-à-dire : $x \in A$: Ceci signifie que : $B \subset A$ ②

D'après ① et ② on en déduit que : $A = B$

Conclusion : $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

Exercice2 : Soient A ; B ; C des parties d'un Ensemble E

1) Que pensez-vous de l'implication : $A \cup B \not\subset C \Rightarrow (A \not\subset C$ ou $B \not\subset C)$? Justifiez (On pourra utiliser la contraposée).

2) On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.
Montrer que $B \subset C$.

Solution : 1) La contraposée de cette implication est :
$(A \subset C$ et $B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$ Cette implication est vraie.

Donc : $A \cup B \not\subset C \Rightarrow (A \not\subset C$ ou $B \not\subset C)$ est aussi vraie

2) Prenons $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, alors $x \in A \cup C$ d'après l'hypothèse.

Si $x \in C$ c'est fini.

Si $x \in A \setminus C$ alors $x \in A \cap B$ (puisque l'on a pris $x \in B$), d'après l'hypothèse $x \in A \cap C$ ce qui entraine que $x \in C$. On a bien montré que $B \subset C$.

Exercice3 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Vérifiant : $E = A \cup B$ et $A \cap C \subset B$ et $B \cap C \subset A$

Monter que : $C \subset A \cap B$

Solution :

Soit $x \in C$ montrons que $x \in A \cap B$?

Si $x \notin A$ comme : $E = A \cup B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ on aboutit à une contradiction

Donc : $x \in A$ (1) et comme : $x \in C$

Alors : $x \in A \cap C$ et puisque : $A \cap C \subset B$

Alors : $x \in B$ (2)

D'après ① et ②on en déduit que : $x \in A \cap B$

Conclusion : $C \subset A \cap B$

Exercice4 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $A \cup B = B \cap C$

Solution : $\Rightarrow$) Analyse :

Si $A \cup B = B \cap C$

On sait que : $A \subset A \cup B$ donc : $A \subset B \cap C \subset B$

On sait que : $B \subset A \cup B$ donc : $B \subset B \cap C \subset C$

Donc : $A \subset B \subset C$

Donc : on a prouvé l'inclusion : $A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \subset B \subset C \ (1)$

$\Leftarrow$) Synthèse :

Si $A \subset B \subset C$ alors : $A \cup B = B$ et $B \cap C = B$

C'est-à-dire : $A \cup B = B \cap C$

Donc : on a prouvé l'inclusion : $A \subset B \subset C \Rightarrow A \cup B = B \cap C \ (2)$

D'après ① et ②on en déduit que :

$A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

Conclusion : une condition nécessaire et suffisante pour que : $A \cup B = B \cap C$ est que : $A \subset B \subset C$

Exercice5 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x^2 - 2x + 6}{x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$; $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / |2x - 1| \le \frac{5}{2} \right\}$ et $C = \left\{ (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 - 4y^2 = 12 \right\}$

Solution : a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x^2 - 2x + 6}{x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$

il est aisé de voir que /

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) : \frac{x^2 - 2x + 6}{x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 5}{x - 1} = \frac{(x-1)^2 + 5}{x - 1}$$

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) : \frac{x^2 - 2x + 6}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x - 1} + \frac{5}{x - 1} = x - 1 + \frac{5}{x - 1}$$

Détermination de : A ?

Soit : $x \in \mathbb{Z}$

$$x \in A \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 1 + \frac{5}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 1 \ divise \ 5$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \in \{-1; 1; -5; 5\} \Leftrightarrow x \in \{0; 2; 6; -4\}$$

Donc : $A = \{0; 2; 6; -4\}$

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / |2x - 1| \le \frac{5}{2} \right\}$

Soit : $\boxed{x \in \mathbb{Z}}$

$$x \in B \Leftrightarrow |2x - 1| \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le 2x - 1 \le \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} + 1 \le 2x \le \frac{5}{2} + 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le 2x \le \frac{7}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le x \le \frac{7}{4}$$

Puisque : $x \in \mathbb{Z}$ alors : $E = \{0; 1\}$

3) $x^2 - 4y^2 = 12 \Leftrightarrow (x + 2y)(x - 2y) = 12$

$x + 2y$ et $x - 2y$ sont des diviseurs de 12

Les diviseurs de 12 sont 1 ;2 ;3 ;4 ;6 ; 12 et -1 ;-2 ;-3 ;-4 ;-6 ; -12   mais on remarque que :

$(x+2y)+(x-2y)=2x$ est pair **et** $(x+2y)(x-2y)=12$

On dresse un tableau :

$x-2y$	2	-2	6	-6
$x+2y$	6	-6	2	-2
x	4	-4	4	-4
y	1	-1	1	-1

$C=\{(4;1);(-4;-1)\}$

Exercice6: Soit l'application : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto x^2$

Déterminer : $f^{-1}(B)$ avec $B=[-1;4]$

Solution : $f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in B\}=\{x\in\mathbb{R}/-1\le f(x)\le 4\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/-1\le x^2\le 4\}=\{x\in\mathbb{R}/0\le x^2\le 4\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/-2\le x\le 2\}=[-2;2]$

Donc $f^{-1}(B)=[-2;2]$

Exercice7 : Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

1) $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 2) $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto x^2\end{array}$

3) $h:\begin{array}{l}[0;1]\to[0;2]\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 4) $k:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x+x^3\end{array}$

Solution : 1) $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}$ $f(-1)=f(1)$ donc f n'est pas injective.

-1 n'a pas d'antécédent, car $f(x)=-1\Leftrightarrow x^2=-1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc : f n'est pas surjective.
Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

2)a) $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto x^2\end{array}$ Soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$

$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2$

$\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$

Car $x_1\ge 0$ ≥ 0 et $x_2\ge 0$

Donc f est injective

b) Soit $y\in\mathbb{R}^+$

$g(x)=y\Leftrightarrow x^2=y\Leftrightarrow x=\sqrt{y}\quad(x\in\mathbb{R}^+)$

Pour tout $y\in\mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x=\sqrt{y}\in\mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $g(x)=y$, donc f est surjective.

f est donc bijective

3) $h:\begin{array}{l}[0;1]\to[0;2]\\ x\ \mapsto x^2\end{array}$

a) Soient $x_1\in[0;1]$ et $x_2\in[0;1]$

$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2$

$\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\ \Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$

Car $x_1\geq 0$ ≥ 0 et $x_2\geq 0$

Donc h est injective

b) 2 n'a pas d'antécédent, car $h x$) = 2 ⇔ x^2 = 2 n'a pas de solution dans [0,1]. h n'est pas surjective

h N'est pas bijective

4) $k:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x+x^3\end{array}$; $k(x)=x+x^3$

k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$(comme somme de deux applications strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

La contraposée de : $k(x_1)=k(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ est

$x_1\neq x_2\Rightarrow k(x_1)\neq k(x_2)$

Supposons que $x_1\neq x_2$

Alors $x_1\prec x_2$ (ou $x_2\prec x_1$, ce que revient au même)

On en déduit que $k(x_1)\prec k(x_2)$ car k est strictement croissante, par conséquent $k(x_1)\neq k(x_2)$),

k est donc injective.

Remarque : k est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc réalise une bijection de : $\mathbb{R}$ vers $k(\mathbb{R})=k(]-\infty;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}k(x);\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)\right[=]-\infty;+\infty[$

k est donc bijective donc surjective et injective (il était inutile de montrer l'injectivité de k)

Exercice8 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}:]0;+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\end{array}$

Montrer que : f est injective

Solution :

Montrons que : f est injective : Soient $x_1\in]0;+\infty[$ et $x_2\in]0;+\infty[$

Montrons que : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$?

Supposons que : $f(x_1)=f(x_2)$

Donc : $\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2+1}+\sqrt{x_2}\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-\sqrt{x_2+1}+\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$

$$\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{x_1+1}-\sqrt{x_2+1}\right)\left(\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}\right)}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}+\frac{\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}=0$$

$$\Rightarrow\frac{x_1+1-x_2-1}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}+\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}=0\Rightarrow(x_1-x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right)=0$$

Or $\frac{1}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\succ 0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\neq 0$

Donc : $\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2+1}+\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$

Par suite : f est injective

Exercice9 : Soit L'application f : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto 3x^2-6x+5$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) f est-elle surjective ?
3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f([1;+\infty[)$ et $f^{-1}([2;11])$

Solution :1) $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+5=0$

$\Delta=(-6)^2-4\times3\times5=36-60=-24\prec 0$

Donc : $S=\varnothing$

2) $f(x)=0$ n'a pas de solutions donc $0\in\mathbb{R}$ n'a pas d'antécédents

Donc : f n'est est-pas surjective

3) Méthode : pour les fonctions : $f(x)=ax^2+bx+c$

$5=c\in\mathbb{R}$(Ensemble d'arrivé) : on Recoud l'équation $f(x)=5$

$f(x)=5\Leftrightarrow 3x^2-6x+5=5\Leftrightarrow x(3x-6)=0\Leftrightarrow x=0 \;\; ou \;\; x=2$

Donc : $f(0)=5=f(2)$ mais $0\neq 2$

Donc : f n'est pas injective

4) Déterminer : $f([1;+\infty[)$ et $f^{-1}([2;11])$

a) $f([1;+\infty[)=?$

$f(x)=3x^2-6x+5$ Déterminons la forme canonique de $f(x)$

$f(x)=3x^2-6x+5=3(x^2-2x)+5=3((x-1)^2-1)+5=3(x-1)^2-3+5=3(x-1)^2+2$

Remarque : $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ et $x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$f([1;+\infty[)=\{f(x)/x\in[1;+\infty[\}$

$x\in[1;+\infty[\Leftrightarrow x\geq1\Leftrightarrow x-1\geq0\Leftrightarrow (x-1)^2\geq0\Leftrightarrow 3(x-1)^2\geq0\Leftrightarrow 3(x-1)^2+2\geq2\Leftrightarrow f(x)\geq2$

$x\in[1;+\infty[\Leftrightarrow f(x)\in[2;+\infty[$

$f([1;+\infty[)=[2;+\infty[$

b) $f^{-1}([2;11])$

$f^{-1}([2;11])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[2;11]\}$

$x\in f^{-1}([2;11])\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\; et\; 2\leq f(x)\leq11\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\; et\; 2\leq3(x-1)^2+2\leq11\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\; et\; 0\leq3(x-1)^2\leq9$

$\Leftrightarrow 0\leq(x-1)^2\leq3$

$\Leftrightarrow 0\leq|x-1|\leq\sqrt{3}\Leftrightarrow 0\leq x-1\leq\sqrt{3}\; ou\; 0\leq -x+1\leq\sqrt{3}\Leftrightarrow 1\leq x\leq\sqrt{3}+1\; ou\; -1\leq -x\leq\sqrt{3}-1$

$\Leftrightarrow 1\leq x\leq\sqrt{3}+1\; ou\; 1-\sqrt{3}\leq x\leq1$

$x\in f^{-1}([2;11])\Leftrightarrow 1\leq x\leq\sqrt{3}+1\; ou\; 1-\sqrt{3}\leq x\leq1\Leftrightarrow x\in\left[1;\sqrt{3}+1\right] ou\; x\in\left[1-\sqrt{3};1\right]$

Donc : $f^{-1}([5;10])=\left[1-\sqrt{3};1\right]\cup\left[1;\sqrt{3}+1\right]=\left[1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right]$

Exercice10 : 1) Montrer que : $\forall x \in [-1;0]$; $1 \le 2\sqrt{x+1} - x \le 2$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[-1;0] \to [1;2] \\ x \mapsto 2\sqrt{x+1} - x \end{array}$

a) Vérifier que : $\forall x \in [-1;0]$; $f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

b) Montrer que f : est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Solution : 1) Montrons que : $\forall x \in [-1;0]$; $1 \le 2\sqrt{x+1} - x \le 2$

Soit $x \in [-1;0]$

$1 \le 2\sqrt{x+1} - x \le 2 \Leftrightarrow 1 + x \le 2\sqrt{x+1} \le 2 + x$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 \le \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \le (2+x)^2$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 - 4(x+1) \le 0$ et $(2+x)^2 - 4(x+1) \ge 0$

$\Leftrightarrow (1+x)(1+x-4) \le 0$ et $x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 \ge 0$

$\Leftrightarrow (1+x)(x-3) \le 0$ et $x^2 \ge 0$

Comme : $x \in [-1;0]$ alors : $-1 \le x \le 0$

Donc : $0 \le x+1 \le 1$ et $-4 \le x-3 \le -3$

On a donc : $(1+x)(x-3) \le 0$ et $x^2 \ge 0$ (vraie)

Par suite : $\forall x \in [-1;0]$; $1 \le 2\sqrt{x+1} - x \le 2$.

2)Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[-1;0] \to [1;2] \\ x \mapsto 2\sqrt{x+1} - x \end{array}$

a) Vérifions que : $\forall x \in [-1;0]$; $f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x = 1 + 2\sqrt{x+1} - x - 1$

$= 1 + 2\sqrt{x+1} - \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 2 - \left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2\sqrt{x+1} + 1\right) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$

b) Montrons que f : est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Soit $y \in [1;2]$;

Résolvons dans : $[-1;0]$; l'équation : $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - x = y \Leftrightarrow 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 = y$

$\Leftrightarrow 2 - y = \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x+1} - 1\right| = \sqrt{2-y}$ Car $2 - y \ge 0$

$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{x+1} - 1\right) = \sqrt{2-y}$ Puisque $x \in [-1;0]$; et donc : $\sqrt{x+1} - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{2-y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{2-y}\right)^2$

Car : $-2 \le -y \le -1 \Rightarrow 0 \le 2 - y \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{2-y} \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sqrt{2-y} \le 0$

$\Rightarrow 0 \le 1 - \sqrt{2-y} \le 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{2-y}\right)^2 \Leftrightarrow x + 1 = \left(1 - \sqrt{2-y}\right)^2$

$\Leftrightarrow x = \left(1 - \sqrt{2-y}\right)^2 - 1$

Comme : $x=\left(1-\sqrt{2-y}\right)^2-1\in[-1;0]$

Ceci signifie que l'application f est bijective.

Sa réciproque est l'application f^{-1}définie par :

$$f^{-1}:[1;2]\to[-1;0]$$
$$x\mapsto\left(1-\sqrt{2-x}\right)^2-1$$

Exercice11 : Soit l'application : $h:\mathbb{R}^+\to\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, $x\mapsto x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h=g\circ f$

2)a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $h(x)=x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}=x-\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2$

Donc : $h=g\circ f$ avec : $f:\mathbb{R}^+\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $x\mapsto\sqrt{x}+\frac{1}{2}$ et $g:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, $x\mapsto x^2$

2)a) f est une bijection en effet : Soit $y\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}+\frac{1}{2}=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{2y-1}{2}$ Or $y\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ donc $2y-1\geq0$ donc : $x=\left(\frac{2y-1}{2}\right)^2$

Donc $x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$ Puisque l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution

Donc : f est une bijection de $\mathbb{R}^+$vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f^{-1}:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

2)b) g est une bijection de $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ en et : $g^{-1}:\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, $x\mapsto\sqrt{x}$

c) h est la composée de deux bijections f et g

Donc :h est une bijection de $\mathbb{R}^+$dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Et $\forall x\in\mathbb{R}^+$: $h^{-1}(x)=(g\circ f)^{-1}(x)=f^{-1}\circ g^{-1}(x)=f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2$

Donc : la bijection réciproque h^{-1} de h est $h^{-1}:\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2$

Exercice12 : 1) Soient $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ et $m \in \mathbb{N} - \{0;1\}$

Montrer que : $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$.

2) l'application définie par : $\begin{array}{l} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} - \{0;1\} \to \mathbb{Q} \\ (n;m) \mapsto n + \frac{1}{m} \end{array}$

a) Montrer que f est injective ? b) f est-elle surjective ?

Solution : 1) Soient $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ et $m \in \mathbb{N} - \{0;1\}$

On a : $n \geq 2$ et $m \geq 2$ Donc : $0 \prec \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $0 \prec \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$

Donc : $0 \prec \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ (1) et $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{m} \prec 0$ (2)

En additionnant (1) et (2) : $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$

2) a) Soit : $(n;m)$; $(n';m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} - \{0;1\}$

Tel que : $f(n;m) = f(n';m')$:

Montrons que : $(n;m) = (n';m')$??

$f(n;m) = f(n';m') \Leftrightarrow n + \frac{1}{m} = n' + \frac{1}{m'} \Leftrightarrow n - n' = \frac{1}{m'} - \frac{1}{m}$

D'après la première question cela montre que : $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{m'} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$

Autrement dit : $-\frac{1}{2} \leq n - n' \leq \frac{1}{2}$: avec $n - n' \in \mathbb{Z}$

Donc : $n - n' = 0$ c'est-à-dire : $n = n'$

Puis en reportant dans : $n - n' = \frac{1}{m'} - \frac{1}{m}$ Cela montre que $\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} = 0$

Donc : $\frac{1}{m'} = \frac{1}{m}$ c'est-à-dire : $m = m'$

Finalement : $(n;m) = (n';m')$

Ce qui montre que f est injective.

b) Regardons si $1 \in \mathbb{Q}$ admet un antécédent,

On suppose qu'il existe, On l'appelle : $(n;m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} - \{0;1\}$

$n + \frac{1}{m} = 1$ Ce qui équivaut à : $\frac{1}{m} = 1 - n$

Mais $\frac{1}{m} \notin \mathbb{Z}$ et $1 - n \in \mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Par conséquent f n'est pas surjective

Exercice13 : Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1) Si les applications $u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $v: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est aussi bijective.

Vrai ou Faux, justifier.

2) L'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \\ (a;b;c) \mapsto 2^a \times 3^b \times 5^c \end{array}$ est une application :

i) bijective

(ii) injective et pas surjective

(iii) surjective et pas injective
(iv) ni surjective ni injective Justifier.
3) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'application φ: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à l'entier $l \in \mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.
i). Bijective
(ii) injective et pas surjective
(iii) surjective et pas injective
(iv) ni surjective ni injective Justifier.
5) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$.
Déterminer l'application réciproque de la bijection : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \\ (u;v) \mapsto (au+bv+1; cu+dv-1) \end{array}$

Solution :1) u et v sont surjectives donc $u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ et $v(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$ par conséquent :
$u \circ v \circ u(\mathbb{N}) = u(v(u(\mathbb{N}))) = u(v(\mathbb{Z})) = u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$
Cela montre que $u \circ v \circ u$ est surjective.
$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u(v(u(x_1))) = u(v(u(x_2))) \Leftrightarrow v(u(x_1)) = v(u(x_2))$
Car u est injective $u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow v(u(x_1)) = v(u(x_2)) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$
Car v est injective $u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
Car u est injective Finalement $u \circ v \circ u$ est injective et donc bijective (puisqu'elle est surjective).
2) a) 7 n'admet pas d'antécédent car : $2^a \times 3^b \times 5^c \neq 7^1$
Donc f n'est pas surjective.
b) $f(a, b, c) = f(a', b', c') \Leftrightarrow 2^a \times 3^b \times 5^c = 2^{a'} \times 3^{b'} \times 5^{c'}$
L'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteur premier entraine que :
$a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, autrement dit f est injective. Donc f est injective et pas surjective. (ii)
3)a) Soit : $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$l \mapsto r$ (le reste de la division euclidienne de l par n)
Pour : n=2 par exemple On a : $5 = 2\times 2+1$ et $7 = 2\times 3+1$; $\varphi(5) = 1$ *et* $\varphi(7) = 1$
Donc φ n'est pas injective.
Autre contre-exemple : $\varphi(n) = 0$ *et* $\varphi(2n) = 0$
b) soit : $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
$\varphi(\mathbb{Z}) = \{0,1, \dots , n-1\} \subsetneq \mathbb{N}$
On peut aussi dire que n n'admet pas d'antécédents
Donc φ n'est pas surjective
5)Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}$ on cherche s'il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{Z}$ tel que :
$(au+bv+1; cu+dv-1) = (x;y)$

$f(u;v) = (x;y) \Leftrightarrow (au+bv+1; cu+dv-1) = (x;y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} au+bv+1 = x \\ cu+dv-1 = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} au+bv = x-1 \\ cu+dv = y+1 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = 1$

Donc : le système admet une solution unique : $u = \dfrac{\begin{vmatrix} x-1 & b \\ y+1 & d \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{d(x-1)-b(y+1)}{1} = d(x-1)-b(y+1) \in \mathbb{Z}$

$v = \dfrac{\begin{vmatrix} a & x-1 \\ c & y+1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{a(y+1)-c(x-1)}{1} = a(y+1)-c(x-1) \in \mathbb{Z}$

Donc : il existe un unique couple $(u;v)$
Donc : f est une bijection
$f(u;v) = (x;y) \Leftrightarrow (u;v) = f^{-1}(x;y)$

$f^{-1}(x;y)=\left(d(x-1)-b(y+1);a(y+1)-c(x-1)\right)$

Donc : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2 \\ (x;y)\mapsto\left(d(x-1)-b(y+1);a(y+1)-c(x-1)\right)\end{array}$

Exercice 14 : Soient A ; B deux parties d'un ensemble E Tel que : $A\subset B$

Résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

Solution : Soit $S=\{X\in P(E)/A\cup X=B\}$

Soit $X\in S$

On va essayer de trouver une condition suffisante sur X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$ est $A\subset B$

Soit $X\in S$ donc : $A\cup X=B$ et comme : $X\subset A\cup X=B$

Alors : $X\subset B$ 1

Montrons aussi : $B-A\subset X$??

On a : $A\cup X=B$ donc : $(A\cup X)\cap\overline{A}=B\cap\overline{A}$

Donc : $(A\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap X)=B-A$

Donc : $B\cap\overline{A}\subset X$ 2

1 et 2 $\Rightarrow B\cap\overline{A}\subset X\subset B$

Donc : $X\in\{X\in P(E)/B\cap\overline{A}\subset X\subset B\}$

Alors : $S\subset\{X\in P(E)/B\cap\overline{A}\subset X\subset B\}$

Montrons aussi : $\{X\in P(E)/B\cap\overline{A}\subset X\subset B\}\subset S$??

Soit $X\in P(E)$ tel que : $B\cap\overline{A}\subset X\subset B$

Montrons que : $A\cup X=B$

On a : $B\cap\overline{A}\subset X\subset B$ donc : $A\cup(B\cap\overline{A})\subset A\cup X\subset A\cup B$

Or $A\subset B$ donc : $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup A)\subset A\cup X\subset B$

Donc : $B\cap E\subset A\cup X\subset B$

Donc : $B\subset A\cup X\subset B$

Donc : $A\cup X=B$

Alors : $\{X\in P(E)/B\cap\overline{A}\subset X\subset B\}\subset S$

Conclusion : $S=\{X\in P(E)/B\cap\overline{A}\subset X\subset B\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien