1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°8 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.

1) Montre à l'aide de contres exemples que les implications suivantes ne sont pas toujours vraies

a) $A\cup B\subset A\cup C\Rightarrow B\subset C$

b) $A\cap B\subset A\cap C\Rightarrow B\subset C$

2) Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $\begin{cases} A\cup B\subset A\cup C \\ A\cap B\subset A\cap C \end{cases}\Rightarrow B\subset C$

3) Monter que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Exercice2 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E

Montrer que : $\begin{cases} A\times B=A\times C \\ A\neq\varnothing \end{cases}\Rightarrow B=C$

Exercice3 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

Monter que : 1) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

2) $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$

Exercice4 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x^2-2x+1} \end{array}$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;1]$

Exercice5 : Soit les 2 applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto(-1)^n \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \end{array}$

Est-ce que $f=g$?

Exercice6 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 3-x^2 \end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. ?

Exercice7 : Soit L'application f : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+2x+2 \end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f([-1;+\infty[)$ et $f^{-1}([5;10])$

Exercice8 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}]1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\dfrac{x}{x^2+x+1} \end{array}$

Montrer que : f est injective

Exercice9 : Soit l'application g : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}^* \\ x\mapsto g(x)=\frac{9}{2x-1}\end{array}$

1)Montrer que g est une bijection. Déterminer son application réciproque

2) Déterminer $g^{-1}\left(\left[-5;2\right]\right)$

Exercice10 : Soient les applications :

$\begin{array}{l} f:\left]1;+\infty\right[\to\left]1;+\infty\right[\\ x\mapsto 1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\left]1;+\infty\right[\to\left]1;+\infty\right[\\ x\mapsto\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2\end{array}$

1) Déterminer : $f\left(\left[2;4\right[\right)$ et $g^{-1}\left(\{9\}\right)$

2) Montrer que f est une bijection de $\left]1;+\infty\right[$ dans $\left]1;+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a) Vérifier que : $\forall x\in\left]1;+\infty\right[: g(x)=\left(f(x)\right)^2$

3)b) En déduire que : g est une bijection de $\left]1;+\infty\right[$ dans $\left]1;+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice11 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \left]0;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[\to\left[4;+\infty\right[\\ (x;y)\mapsto(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\end{array}$

1**)** Montrer que f est surjective

2) f est-elle injective ?

Exercice12 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1)a) Déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$

b) Résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

2) On suppose que $C\subset A\subset B$

Résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C\end{cases}$

Exercice13 : Soit E un ensemble et $P(E)$L'ensemble de ses parties, et soient A ; B des parties de E. Soit l'application f : $\begin{array}{l} P(E)\to P(E)\times P(E) \\ X\mapsto(X\cup A;X\cup B)\end{array}$

1)Montrer que f n'est pas surjective

2)Montrer que f est injective si et seulement si $A\cap B=\varnothing$

Exercice14 : Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que :

1)$f^{-1}(A'\cup B')=f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$

2) $f^{-1}(A'\cap B')=f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien