1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°8 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.

1) Montre à l'aide de contres exemples que les implications suivantes ne sont pas toujours vraies

a) $A\cup B\subset A\cup C\Rightarrow B\subset C$

b) $A\cap B\subset A\cap C\Rightarrow B\subset C$

2) Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.

Monter que : $\begin{cases} A\cup B\subset A\cup C \\ A\cap B\subset A\cap C \end{cases}\Rightarrow B\subset C$

3) Monter que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Solution : 1)a) $A=\{1;2;3\}$ et $B=\{1\}$ et $C=\{3;5\}$

$A\cup B=\{x/x\in A\ \ ou\ \ x\in B\}=\{1;2;3\}$

$A\cup C=\{x/x\in A\ \ ou\ \ x\in C\}=\{1;2;3;5\}$

On a : $A\cup B\subset A\cup C$ mais $B\not\subset C$

b) $A=\{1;2;3\}$ et $B=\{3;4;5\}$ et $C=\{3;4;6\}$

$A\cap B=\{x/x\in A\ \ et\, x\in B\}=\{3\}$

$A\cap C=\{x/x\in A\ \ et\, x\in C\}=\{3\}$

On a : $A\cap B\subset A\cap C$ mais $B\not\subset C$

2)On suppose que : $\begin{cases} A\cup B\subset A\cup C \\ A\cap B\subset A\cap C \end{cases}$ Montrons que : $(\forall x\in E)(x\in B\Rightarrow x\in C)$?

$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cup C\Rightarrow x\in A$ ou $x\in C$

- Si $x\in A$ alors $x\in A\cap B$ donc $x\in A\cap C$ car $A\cap B\subset A\cap C$ donc $B\subset C$
- Si $x\notin A$ et puisque $x\in C$ ou $x\in A$ est vraie alors $B\subset C$

Conclusion : $(\forall x\in E)(x\in B\Rightarrow x\in C)$

Donc : $B\subset C$

3) Montrons que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

$\Rightarrow)$ On suppose que : $A\cap B=A\cap C$ Montrons que : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

$\subset)$ Montrons que : $A\cap\overline{B}\subset A\cap\overline{C}$

✓ Soit $x\in A\cap\overline{B}$ montrons que $x\in A\cap\overline{C}$?

$x\in A\cap\overline{B}\ \Rightarrow x\notin B\ \ et\ x\in A\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A\cap C$

$\Rightarrow x\notin C$ car : $x\in A$

C'est-à-dire : $x\in A\cap\overline{C}$

$\supset)$ De même on Montre que : $A\cap\overline{C}\subset A\cap\overline{B}$

Donc : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Par suite : $A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

$\Leftarrow)$ On suppose que : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Montrons que : $A\cap B=A\cap C$

✓ Soit $x\in A\cap B$ montrons que $x\in A\cap C$?

$x\in A\cap B\ \Rightarrow x\in A\ \ et\ x\in B\Rightarrow x\in A\ \ et\ x\notin\overline{B}\Rightarrow x\notin A\cap\overline{B}\Rightarrow x\notin A\cap\overline{C}$

$\Rightarrow x\notin\overline{C}$ car : $x\in A$

$\Rightarrow x \in C$ et $x \in A$

$\Rightarrow x \in A \cap C$

Donc : $A \cap B \subset A \cap C$

- ✓ De même on Montre que : $A \cap C \subset A \cap B$

Par suite : $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

Conclusion : $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

Exercice2 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E

Montrer que : $\begin{cases} A \times B = A \times C \\ A \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow B = C$

Solution : a) Montrons que : $B \subset C$?

Soit un élément $y \in B$ et puisque : $A \neq \varnothing$

Alors $\exists x \in A$

Et donc : $\exists (x; y) \in A \times B$

Donc : $(x; y) \in A \times C$

Donc : $x \in A$ et $y \in C$

Donc : $y \in B \Rightarrow y \in C$

Donc : $B \subset C$

a) Montrons que : $C \subset B$? (La même démarche)

Car C *et* B jouent des rôles symétriques

Conclusion : $\begin{cases} A \times B = A \times C \\ A \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow B = C$

Exercice3 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

Monter que : 1) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

2) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Solution :1) *Remarque :* $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (lois de Morgan)

$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$

$(A \setminus B) \setminus C = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \setminus (B \cup C)$

2) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) = (A \cap C) \setminus (\overline{B \cup D}) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice4 : Soit l'application : $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty; 1]$

Solution : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$

Si $x \in]-\infty; 1]$ alors : $f(x) = -(x-1) = -x + 1$

Donc : la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ est l'application $\begin{aligned} g :]-\infty; 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x + 1 \end{aligned}$

Exercice5 : Soit les 2 applications : $\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto (-1)^n \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \end{aligned}$

Est-ce que $f = g$?

Solution : Deux applications f et g ont le même ensemble de départ $\mathbb{Z}$ et le même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ et on a : $g(n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos(n\pi)=(-1)^n=f(n)$

Donc : $f=g$

Exercice6 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 3-x^2 \end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$vers $\mathbb{R}$. ?

Solution : On remarque que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ On a : $f(x)\leq 3$

Donc par exemple l'équation : $f(x)=4$n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ donc : f est non surjective

Exercice7 : Soit L'application f : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+2x+2 \end{array}$

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ? justifier

4) Déterminer : $f([-1;+\infty[)$ et $f^{-1}([5;10])$

Solution :1) $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x+2=0$

$\Delta=2^2-4\times 2=4-8=-4\prec 0$

Donc : $S=\varnothing$

2) $f(x)=0$ n'a pas de solutions donc $0\in\mathbb{R}$ n'a pas d'antécédents

Donc : f n'est est-pas surjective

3) Méthode : pour les fonctions : $f(x)=ax^2+bx+c$

$2=c\in\mathbb{R}$ (Ensemble d'arrivé) : on Recoud l'équation $f(x)=2$

$f(x)=2\Leftrightarrow x^2+2x+2=2\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Leftrightarrow x=0 \;\; ou \;\; x=-2$

Donc : $f(0)=2=f(-2)$ mais $0\neq -2$

Donc : f n'est pas injective

4) Déterminer : $f([-1;+\infty[)$ et $f^{-1}([5;10])$

a) $f([-1;+\infty[)=?$

$f(x)=x^2+2x+2$ Déterminons la forme canonique de $f(x)$

$f(x)=(x^2+2x)+2=(x+1)^2-1^2+2=(x+1)^2+1$

Remarque : $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ et $x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$f([-1;+\infty[)=\{f(x)/x\in[-1;+\infty[\}$

$x\in[-1;+\infty[\Leftrightarrow x\geq -1\Leftrightarrow x+1\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq 1$

$x\in[-1;+\infty[\Leftrightarrow f(x)\in[1;+\infty[$

$f([-1;+\infty[)=[1;+\infty[$

b) $f^{-1}([5;10])$

$f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[5;10]\}=\{x\in\mathbb{R}/5\leq f(x)\leq 10\}$

$x \in f^{-1}([5;10]) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $5 \le f(x) \le 10 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $5 \le (x+1)^2 + 1 \le 10 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $4 \le (x+1)^2 \le 9$

$x \in f^{-1}([5;10]) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2 \le |x+1| \le 3 \Leftrightarrow 2 \le x+1 \le 3$ ou $2 \le -x-1 \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$ ou $3 \le -x \le 4$

$x \in f^{-1}([5;10]) \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$ ou $-4 \le x \le -3 \Leftrightarrow x \in [1;2]$ ou $x \in [-4;-3]$

Donc : $f^{-1}([5;10]) = [1;2] \cup [-4;-3]$

Exercice8 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1} \end{array}$

Montrer que : f est injective

Solution : Montrons que : f est injective : Soient $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Supposons que : $f(x_1) = f(x_2)$

Donc : $\dfrac{x_1}{x_1^2+x_1+1} = \dfrac{x_2}{x_2^2+x_2+1} \Rightarrow x_1(x_2^2+x_2+1) = x_2(x_1^2+x_1+1)$

$\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1x_2 + x_1 = x_2x_1^2 + x_2x_1 + x_2 \Rightarrow x_1x_2^2 - x_2x_1^2 + x_1 - x_2 = 0$

$\Rightarrow x_1x_2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = 0$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = 0$ ou $x_1 \times x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 \times x_2 = 1$

Or : $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[\Rightarrow x_1 \succ 1$ et $x_2 \succ 1 \Rightarrow x_1 \times x_2 \succ 1 \Rightarrow x_1 \times x_2 \ne 1$

Donc : $\dfrac{x_1}{x_1^2+x_1+1} = \dfrac{x_2}{x_2^2+x_2+1} \Rightarrow x_1 = x_2$

Par suite : f est injective

Exercice9 : Soit l'application g : $\begin{array}{l} : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto g(x) = \dfrac{9}{2x-1} \end{array}$

1)Montrer que g est une bijection. Déterminer son application réciproque

2) Déterminer $g^{-1}([-5;2])$

Solution : 1) $g(x) = \dfrac{9}{2x-1}$

Soient $x_1 \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et $x_2 \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \dfrac{9}{2x_1+1} = \dfrac{9}{2x_2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2x_1+1} = \dfrac{1}{2x_2+1} \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Ainsi on a montré que g est injective.

2)Soit $y \in \mathbb{R}^*$

Résolvons dans $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ l'équation : $f(x) = y$

Soit : $y \in \mathbb{R}^*$

$g(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{9}{2x-1}=y \Leftrightarrow 9=y(2x-1)$

$\Leftrightarrow 9=y(2x-1)$

$\Leftrightarrow 2xy-y=9$

$\Leftrightarrow 2xy=9+y \Leftrightarrow 2xy=9+y$ Comme $y\in\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{9+y}{2y}$ Bien défini.

On doit aussi montrer que : $x=\dfrac{9+y}{2y}\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

C'est-à-dire : On doit montrer que : $\dfrac{9+y}{2y}\neq\dfrac{1}{2}$??

On raisonne par l'absurde, c-à-d on suppose que :

$\dfrac{9+y}{2y}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{9+y}{2y}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(9+y)=2y \Leftrightarrow 18+2y=2y \Leftrightarrow 18=0$

Ce qui est impossible.

On déduit alors : $\forall y\in\mathbb{R}^*\ \exists x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\} / g(x)=y$

Ceci signifie que l'application g est surjective.
On a l'application g est injective et surjective, ceci signifie d'après un théorème que l'application g est bijective.

$$\begin{cases} g(x)=y \\ x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g^{-1}(y)=\dfrac{9+y}{2y} \\ y\in\mathbb{R}^*\end{cases}$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $g^{-1}(x)=\dfrac{9+x}{2x}$

$g^{-1}:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$x\mapsto g^{-1}(x)=\dfrac{9+x}{2x}$

2) Déterminons : $g^{-1}([-5;2])$

On a : $g^{-1}(x)=\dfrac{9+x}{2x}=\dfrac{9}{2}\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}$

$g^{-1}([-5;2]-\{0\})=g^{-1}([-5;0[\cup]0;2])$

$=g^{-1}([-5;0[)\cup g^{-1}(]0;2])$

$-5\leq x\prec 0 \Rightarrow \dfrac{9}{2}\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{-2}{5}$

$0\prec x\leq 2 \Rightarrow \dfrac{11}{4}\leq\dfrac{9}{2}\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}$

Ainsi : $g^{-1}([-5;2])=\left]-\infty;-\dfrac{2}{5}\right]\cup\left[\dfrac{11}{4};+\infty\right[$

Exercice10: Soient les applications :

$f:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$ et $g:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$

$x \mapsto 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ et $x \mapsto \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$

1) Déterminer : $f([2;4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2) Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a) Vérifier que : $\forall x \in]1;+\infty[: g(x) = (f(x))^2$

3)b) En déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $x \in [2;4[\Leftrightarrow 2 \le x \prec 4 \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \le \sqrt{x}-1 \prec 1 \Leftrightarrow 1 \prec \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\Leftrightarrow 3 \prec f(x) \le 3+2\sqrt{2}$

Donc : $f([2;4[) =]3;3+2\sqrt{2}]$

$g^{-1}(\{9\}) = \{x \in]1;+\infty[/ g(x) \in \{9\}\} = \{x \in]1;+\infty[/ g(x) = 9\}$

$g^{-1}(\{9\}) = \{x \succ 1 / \sqrt{x} = 2\} = \{x \succ 1 / x = 4\} = \{4\}$

2)Montrons que f est injective ?

Soient $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1+\dfrac{2}{\sqrt{x_1}-1} = 1+\dfrac{2}{\sqrt{x_2}-1}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1}-1 = \sqrt{x_2}-1 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc f est injective

Montrons que f est surjective ?

Soit $y \in]1;+\infty[$; $y = f(x) \Leftrightarrow y = 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$

$\Leftrightarrow y-1 = \dfrac{2}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = \dfrac{2}{y-1} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{2}{y-1}+1 = \dfrac{2+y-1}{y-1} = \dfrac{y+1}{y-1}$

$y = f(x) \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2$ et on a : $\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2 - 1 = \left(\dfrac{y+1}{y-1}-1\right)\left(\dfrac{y+1}{y-1}+1\right) = \dfrac{4y}{(y-1)^2} \succ 0$

Donc : $\forall y \in]1;+\infty[\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2 \succ 1$

Donc : $(\forall y \in]1;+\infty[)(\exists x \in]1;+\infty[) / x = \left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2$ et $y = f(x)$

Donc : que f est surjective de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

Détermination de sa bijection réciproque ?

$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ y \in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

Donc : $f^{-1}:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$

$x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

3)a) Vérifier que : $\forall x \in]1;+\infty[: (f(x))^2 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)^2 = g(x)$

3)b) On a : $g = h \circ f$ avec $h(x) = x^2$ $\forall x \in]1;+\infty[$:

Et puisque les applications f et h sont des bijections de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ alors $g = h \circ f$ est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et on a : $g^{-1}(x) = (h \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ h^{-1}(x) = f^{-1}(h^{-1}(x)) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2 = g(x)$

Exercice11 : Soit l'application $f : \begin{array}{l}]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to [4;+\infty[\\ (x;y) \mapsto (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \end{array}$

1) Montrer que f est surjective
2) f est-elle injective ?

Solution : 1) 2) Soit : $z \in [4;+\infty[$; $\exists ?(x;y) \in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

Tel que : $f(x;y) = z$??

$f(x;y) = z \Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = z$

$\Leftrightarrow 1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1 = z \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} = z-2$

On pose : $\frac{x}{y} = t$ $\Leftrightarrow t+\frac{1}{t} = z-2 \Leftrightarrow t^2-(z-2)t+1 = 0$

$\Delta = (z-2)^2-4 = z^2-4z$

Comme : $45 \leq z$ alors : $z-2 \geq 2 \Rightarrow (z-2)^2 \geq 4$

Donc : $\Delta = (z-2)^2-4 \geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$t = \frac{(z-2)+\sqrt{(z-2)^2-4}}{2} \succ 0$ ou $t = \frac{(z-2)-\sqrt{(z-2)^2-4}}{2}$

Donc : $\exists (x;y) \in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ tel que : $f(x;y) = z$

Donc : f est surjective
2) f est-elle injective ?
Si je trouve : $(x_1;x_2) \neq (x_1';x_2')$ et $f(x_1;x_2) = f(x_1';x_2')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $f\left(\frac{1}{2};2\right) = \left(\frac{1}{2}+2\right)\left(2+\frac{1}{2}\right) = f\left(2;\frac{1}{2}\right)$ mais $\left(\frac{1}{2};2\right) \neq \left(2;\frac{1}{2}\right)$

Donc : f n'est pas injective

Exercice12 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E
1)a) Déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A \cup X = B$

b) Résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A \cup X = B$

2) On suppose que $C \subset A \subset B$

Résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$

Solution : 1) Si on a : $A \cup X = B$ alors : $X \subset B$ et $A \subset B$

Donc une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$ est $A\subset B$

b) résolution dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

$A\cup X=B\Rightarrow(A-B)\cap(A\cup X)=(B-A)\cap B$

$\Leftrightarrow[(B-A)\cap A]\cup[(B-A)\cap X]=B-A$

$\Leftrightarrow\varnothing\cup[(B-A)\cap X]=B-A$

$\Leftrightarrow(B-A)\cap X=B-A\Leftrightarrow B-A\subset X\Rightarrow B-A\subset X\subset B$

Inversement :

$\forall X\in P(E)$ tel que : $B-C\subset X\subset B$ est solution de l'équation : $A\cup X=B$

Et on a : $(B-A)\cup A=B \quad (B-A)\cap A=\varnothing$

Donc : $A\cup X=B\Leftrightarrow X=(B-A)\cup Y \quad Y\in P(E)$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$S=\{(B-A)\cup Y;Y\in P(E)\}$

2) $C\subset A\subset B$

$\begin{cases}A\cup X=B\\A\cap X=C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=(B-A)\cup Y\,/\,Y\in P(E)\\A\cap[(B-A)\cup Y]=C\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}X=(B-A)\cup Y\,/\,Y\in P(E)\\ [A\cap(B-A)]\cup[A\cap Y]=C\end{cases}$ et puisque $A\cap(B-A)=\varnothing$ et $A\cap Y=Y$ car $Y\subset A$

Alors : $X=(B-A)\cup C$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $S=\{(B-A)\cup C\}$

Exercice13 : Soit E un ensemble et $P(E)$ L'ensemble de ses parties, et soient A ; B des parties de E. Soit l'application f : $\begin{aligned}P(E)&\to P(E)\times P(E)\\X&\mapsto(X\cup A;X\cup B)\end{aligned}$

1)Montrer que f n'est pas surjective

2)Montrer que f est injective si et seulement si $A\cap B=\varnothing$

Solution : 1) On cherche un élément de $P(E)\times P(E)$ n'admettant pas d'antécédent dans $P(E)$ par f . Considérons alors le couple $(\varnothing;\varnothing)$.

$f(X)=(\varnothing;\varnothing)\Leftrightarrow$ X ∪ A = X ∪ B =∅ ;

Ceci est impossible, sauf si A = B = X =∅ ; ce qui est exclu. Ainsi, f n'est pas surjective.

Remarque Tout couple du type (A' ,B'), où A' est une partie de A, incluse strictement dans A et/ou B' est une partie de B, strictement incluse dans B, aurait fourni un contre-exemple.

2) On raisonne ici par double implication.

• ⇐ : Soient X ,X' ∈ E telles que f (X) = f (X').

Alors X ∪ A = X' ∪ A et X ∪ B = X' ∪ B (∗).

On en déduit : X = X ∪∅ = X ∪(A ∩ B) (par hypothèse)
= (X ∪ A)∩(X ∪ B)
= (X' ∪ A)∩(X' ∪ B) (d'après(∗))
= X' ∪(A ∩ B) = X' ∪∅ ; = X'

Dès lors, f est bien injective.

• ⇒ : D'une part, f (∅) = (∅∪ A; ∅∪ B) = (A;B).

D'autre part, f (A ∩ B) = ((A ∩ B)∪ A;(A ∩ B)∪ B) = (A;B).

f étant injective, on en déduit : A ∩ B = ∅;.

On a donc bien : f injective ⇔ A ∩ B =∅ ;

Exercice14: Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que :

1)$f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

2) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Solution :1) Pour tout $x \in f^{-1}(A' \cup B')$, $f(x) \in A' \cup B'$

Donc $f(x) \in A'$ ou $f(x) \in B'$,

Par conséquent $x \in f^{-1}(A')$ ou $x \in f^{-1}(B')$,

Autrement dit : $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

On a montré que $f^{-1}(A' \cup B') \subset f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

Pour tout $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$: $x \in f^{-1}(A')$ ou $x \in f^{-1}(B')$,

Par conséquent $f(x) \in A'$ ou $f(x) \in B'$,

Autrement dit $f(x) \in A' \cup B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cup B')$. On a montré que $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$ Finalement $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

2) Pour tout $x \in f^{-1}(A' \cap B')$, $f(x) \in A' \cap B'$

Donc $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$,

Par conséquent $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$,

Autrement dit $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

On a montré que :

$f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ Pour tout $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$, $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$, autrement dit $f(x) \in A' \cap B'$

Donc :$x \in f^{-1}(A' \cap B')$.

On a montré que $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cap B')$

Finalement $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}B')$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien