1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°7 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : On considère les deux ensembles suivants :

$A=\left\{x\in\mathbb{N}\,/\,\frac{2x+16}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}-\{-1\}\,/\,\frac{x^3-x+6}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{Z}-\{-1\});\frac{x^3-x+6}{x+1}=x^2-x+\frac{6}{x+1}$

2) Déterminer : A ; B ; $A\cap B$; $A-B$ et $A\cup B$ en extension

Exercice2 : Soient les ensembles : $H=\left\{y\in\mathbb{R}\,/\,y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}\right\}$; $G=\left\{y\in\mathbb{R}\,/\,y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $H=]0;1]$

a) Considérer un élément $y_0\in H$ et montrer que : $y_0\in]0;1]$

b) Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrer que : $y_0\in H$.

2)Monter que $G\subset H$ 3) Est-ce que $G=H$?

Exercice3 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $\begin{cases}B-A=C-A\\A\cap B=A\cap C\end{cases}\Rightarrow B=C$

Exercice4 : Soit E un ensemble et F et G deux parties de E.

Démontrer que : 1) $F\subset G\Leftrightarrow F\cup G=G$ 2) $F\subset G\Leftrightarrow F\cap C_E^G=\emptyset$

Exercice5 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\A-C=B-C\end{cases}\Rightarrow A\subset B$

Exercice6 : On rappelle que l'on note : $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

1) Montrer que : a) $(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=A\cap B\cap\overline{C}$ b) $(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=A\cap C\cap\overline{B}$

2) En déduire que $(A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C)=A\cap(B\Delta C)$

Exercice7 : L'ensemble A^2 contient 9 éléments dont deux éléments sont $(x;y)$ et $(x;z)$

Quels sont les autres éléments de A^2 ?

2) Existe-t-il une ensemble A tel que $card\left(A^2\right)=7$?

Exercice8 : Soient E et F deux ensembles. A_1 , $A_2\subset E$ et $B\subset F$.

1)Monter que : a) $(A_1\cup A_2\times B)=(A_1\times B)\cup(A_2\times B)$

b) $(A_1\cap A_2)\times B=(A_1\times B)\cap(A_2\times B)$

c) Donner les mêmes résultats pour $A\times(B_1\cap B_2)$ et : $A\times(B_1\cup B_2)$.

Exercice9 : Soient l'ensemble :

$L=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\le1\right\}$ et $G=[-1;1]$

1) Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

2) Monter que : $L\subset G^2$ et $L\neq G^2$

Exercice10 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; On pose : $\forall k\in\{0;1;2;....;n-1\}=E$; $I_k=\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$

1) Montrer que : $\forall k\in E\ \ I_k\subset[0;1[$ 2) Montrer que : $\forall(k;k')\in E^2$; $k\neq k'\Rightarrow I_k\cap I_{k'}=\varnothing$

Exercice11 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x-|x|+3 \end{array}$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Exercice12 : Soit les applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2|x|-x \end{array}$

Est-ce que g est un prolongement de f ?

Exercice13 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$; Montrer que : $f^{-1}([-1;1])=\mathbb{R}$

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=\begin{cases} 1 & si:\ x\prec 0 \\ 1+x & si:\ x\geq 0 \end{cases} \end{array}$

1) Déterminer les ensembles suivants : $f(\mathbb{R})$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}(\{1\})$; $f^{-1}(\{-1\})$; $f^{-1}(]1;2])$

2) a) f est injective ? b) f est-elle surjective ?

Exercice15 : Soit f l'application : $\begin{array}{l} :]2;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+2} \end{array}$

1)Montrer que : f est injective 2) l'application g : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+2} \end{array}$ est-elle injective ? justifier

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} \end{array}$

1) Montrer que f n'est pas surjective 2) Montrer que $f(\mathbb{R}^{+})=\left[-\frac{1}{3};1\right[$

3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+}$ dans $\left[-\frac{1}{3};1\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice17 : Soit les applications suivantes :

$f:\begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \sin(x) \end{array}$ $g:\begin{array}{l} \mathbb{N}^2\to\mathbb{N} \\ (n;p)\mapsto n+p \end{array}$ $h:\begin{array}{l} \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x;y)\mapsto (x+3y\ ;x-y) \end{array}$

1) a) f est-elle injective ? b) f est-elle surjective ?

2) Montrer que g est surjective

3) Déterminer : $g(\mathbb{N}^2)$

4) Déterminer : $g^{-1}(\{2\})$

5) g est-elle injective ?

6) Montrer que h est bijective

7) Déterminer : h^{-1}

8) Déterminer : $h(\mathbb{R}^2)$ et $h^{-1}(\mathbb{R}^2)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien