1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°7 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : On considère les deux ensembles suivants : $A=\left\{x\in\mathbb{N}/\frac{2x+16}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}-\{-1\}/\frac{x^3-x+6}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{Z}-\{-1\}\right);\frac{x^3-x+6}{x+1}=x^2-x+\frac{6}{x+1}$

2) Déterminer : A ; B ; $A\cap B$; $A-B$ et $A\cup B$ en extension

Solution : 1) 1) soit : $x\in\mathbb{Z}-\{-1\}$

$$x^2-x+\frac{6}{x+1}=\frac{(x^2-x)(x+1)+6}{x+1}=\frac{x^3+x^2-x^2-x+6}{x+1}=\frac{x^3-x+6}{x+1}$$

2) a) Détermination de : A ? $A=\left\{x\in\mathbb{N}/\frac{2x+16}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$

Soit $x\in\mathbb{N}$:

$$\frac{2x+16}{x+2}=\frac{2x+4+12}{x+2}=\frac{2x+4}{x+2}+\frac{12}{x+2}=2+\frac{12}{x+2}$$

$x\in A \Leftrightarrow 2+\frac{12}{x+2}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{12}{x+2}\in\mathbb{N}$ Car $\frac{12}{x+2}\geq 0$

$x\in A\Leftrightarrow x\neq -2 \text{ et } x+2 \text{ divise } 12$

$\Leftrightarrow x+2\in\{1;2;3;4;6;12\}\Leftrightarrow x\in\{0;1;2;3;4;10\}$

Donc : $A=\{0;1;2;3;4;10\}$

b) Détermination de B en extension : On a : $B=\left\{x\in\mathbb{Z}-\{-1\}/x^2-x+\frac{6}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Soit : $x\in\mathbb{Z}-\{-1\}$:

$x\in B\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}-\{-1\} \text{ et } x^2-x+\frac{6}{x+1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}-\{-1\} \text{ et } \frac{6}{x+1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x+1 \text{ divise } 6$

$\Leftrightarrow x+1\in\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}\Leftrightarrow x\in\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$

Donc : $B=\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$

Détermination de : $A\cap B$; $A-B$ et $A\cup B$?

On a : $A=\{0;1;2;3;4;10\}$ et $B=\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$

Donc : $A\cap B=\{0;1;2\}$

$A-B=\{3;4;10\}$

$A\cup B=\{0;1;2;3;4;10;-7;-3;-2;5\}$

Exercice2: Soient les ensembles : $H=\left\{y\in\mathbb{R}/y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}\right\}$; $G=\left\{y\in\mathbb{R}/y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $H=\left]0;1\right]$

a) Considérer un élément $y_0\in H$ et montrer que : $y_0\in\left]0;1\right]$

b) Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrer que : $y_0\in H$.

2)Monter que $G\subset H$

3) Est-ce que $G=H$?

Solution : 1)a) soit un élément $y_0\in H$ montrons que $y_0\in]0,1]$?

$y_0\in H\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2+1}}$

On a $x_0{}^2\geq 0\Rightarrow x_0{}^2+1\geq 1\Rightarrow\sqrt{x_0{}^2+1}\geq 1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2+1}}\leq 1\Rightarrow y_0\in]0,1]$ Donc : $H\subset\left]0;1\right]$ **(1)**

b) Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrons que $y_0\in H$?

$y_0\in\left]0;1\right]\quad \exists ?x_0\in\mathbb{R}/y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2+1}}$

$y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2+1}}\Leftrightarrow y_0{}^2=\frac{1}{x_0{}^2+1}\Leftrightarrow x_0{}^2=\frac{1}{y_0{}^2}-1$

Or : $y_0\in\left]0;1\right]$ donc $0\prec y_0\leq 1$ donc : $\frac{1}{y_0{}^2}-1\geq 0$

Donc : il suffit de prendre : $x_0=\sqrt{\frac{1}{y_0{}^2}-1}$ Donc : $y_0\in H$

Donc : $\left]0;1\right]\subset H$ **(2)**

De : (1) et (2) en déduit que **:** $H=\left]0;1\right]$

2) Montrons que $G\subset H$?

Montrons que : $G\subset\left]0;1\right]$?

Soit un élément $y_0\in G$ montrons que $y_0\in]0,1]$?

$y_0\in G\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/y_0=\frac{1}{1+\sqrt{x_0{}^2+1}}$

On a $x_0{}^2\geq 0\Rightarrow x_0{}^2+1\geq 1\Rightarrow\sqrt{x_0{}^2+1}\geq 1\Rightarrow\sqrt{x_0{}^2+1}+1\geq 2\Rightarrow 0\prec\frac{1}{1+\sqrt{x_0{}^2+1}}\leq\frac{1}{2}\leq 1$

Donc : $y_0\in]0,1]$ Donc : $G\subset H$

3)supposons : $G=H$

On a $1\in H\Rightarrow 1\in G$

$\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/1=\frac{1}{1+\sqrt{x_0{}^2+1}}\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/1+\sqrt{x_0{}^2+1}=1\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/\sqrt{x_0{}^2+1}=0$

$\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/x_0{}^2=-1$ Absurde donc : $H\neq G$

Exercice3 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $\begin{cases}B-A=C-A\\ A\cap B=A\cap C\end{cases}\Rightarrow B=C$

Solution : On suppose que : $B-A=C-A\ \ et\ A\cap B=A\cap C$

$\subset$) Montrons que $B \subset C$?

Soit $x \in B$

Si $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \cap C$ car : $A \cap B = A \cap C$

C'est-à-dire : $x \in C$

Si $x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow x \in C - A$ C'est-à-dire : $x \in C$

Dans tous les cas, on conclut que : $B \subset C$

$\supset$) Montrons que $C \subset B$?

La même démarche car B et C jouent des rôles symétriques.

On a donc : $B \subset C$ et $C \subset B$

Conclusion : $B = C$

Exercice4 : Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que : 1) $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$

2) $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E^G = \emptyset$

Solution : Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1) Supposons que $F \subset G$. Si $x \in F \cup G$

Alors $x \in F \subset G$ ou $x \in G$ alors $x \in G$.

Donc $F \cup G \subset G$. Si $x \in G$ alors $x \in F \cup G$,

Par conséquent $F \cup G = G$.

On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cup G = G$

Supposons que $F \cup G = G$.

Soit $x \in F$, $x \in F \cup G = G$ donc $x \in G$.

On a montré que $F \cup G = G \Rightarrow F \subset G$.

Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$.

2) Supposons que $F \subset G$.

Si $x \in F \cap CEG$, $x \in F$ et $x \notin G \supset F$

Donc $x \in F$ et $x \notin F$ ce qui est impossible par conséquent $F \cap CEG = \emptyset$.

On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cap CEG = \emptyset$

Supposons que $F \cap CEG = \emptyset$.

Soit $x \in F$, supposons que $x \notin G \Leftrightarrow x \in CEG$

Ce qui signifie que $x \in F \cap CEG = \emptyset$, c'est impossible donc l'hypothèse $x \notin G$ est fausse,

Par conséquent $x \in G$ et $F \subset G$.

On a montré que $F \cap CEG = \emptyset \Rightarrow F \subset G$.

Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cap CEG = \emptyset$

Exercice5 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C = B - C \end{cases} \Rightarrow A \subset B$

Solution : On suppose que : $A \cap C \subset B \cap C$ et $A - C = B - C$

Montrons que $A \subset B$?

Soit $x \in A$

Si $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in B \cap C$ C'est-à-dire : $x \in B$

Si $x \notin C \Rightarrow x \in A - C \Rightarrow x \in B - C$ C'est-à-dire : $x \in B$

Dans tous les cas, on conclut que : $A \subset B$

Exercice6 : On rappelle que l'on note : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1) Montrer que :

a) $(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$

b) $(A \cap C) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap C \cap \overline{B}$

2) En déduire que $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$

Solution :1) a) $(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=(A\cap B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{C}\right)=\left(A\cap B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$

$=\left(\left(A\cap\overline{A}\right)\cap B\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$ or : $A\cap\overline{A}=\varnothing$

$=(\varnothing\cap B)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)=\varnothing\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$ car $\varnothing\cap B=\varnothing$

$=A\cap B\cap\overline{C}$ car $\varnothing\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)=A\cap B\cap\overline{C}$

Donc : $(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=A\cap B\cap\overline{C}$

b) $(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cap C)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\left(A\cap C\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$

$=\left(\left(A\cap\overline{A}\right)\cap C\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$ or : $A\cap\overline{A}=\varnothing$

$=(\varnothing\cap C)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)=\varnothing\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$ car $\varnothing\cap C=\varnothing$

$=A\cap C\cap\overline{B}$ car $\varnothing\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)=A\cap C\cap\overline{B}$

Donc : $(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=A\cap C\cap\overline{B}$

2) $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=\left((A\cap B)\setminus(A\cap C)\right)\cup\left((A\cap C)\setminus(A\cap B)\right)$

$=(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\cup(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)$

$=\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)=A\cap\left(\left(B\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{B}\right)\right)$

$=A\cap\left((B-C)\cup(C-B)\right)=A\cap(B\Delta C)$

Exercice7 : L'ensemble A^2 contient 9 éléments dont deux éléments sont $(x;y)$ et $(x;z)$ quels sont les autres éléments de A^2 ?

2) Existe-t-il une ensemble A tel que $card\left(A^2\right)=7$?

Solution :1) on sait que : $card\left(A^2\right)=card\left(A\times A\right)=card\left(A\right)\times card\left(A\right)=\left(card\left(A\right)\right)^2$

L'ensemble A^2 contient 9 éléments donc : $\left(card\left(A\right)\right)^2=9$

Donc : $card\left(A\right)=\sqrt{9}=3$

$(x;y)\in A^2 \Leftrightarrow x\in A \;\; et \;\; y\in A$

$(y;z)\in A^2 \Leftrightarrow z\in A \;\; et \;\; y\in A$

Donc : $A=\{x;y;z\}$

Donc : $A^2=\{(x;y);(y;x);(x;z);(z;x);(y;z);(z;y);\,;(x;x);(y;y);(z;z)\}$

2) $\left(card\left(A\right)\right)^2=7 \Leftrightarrow card\left(A\right)=\sqrt{7}\notin\mathbb{N}$

Donc : il n'existe pas un ensemble A tel que $card\left(A^2\right)=7$

Exercice8 : Soient E et F deux ensembles. A_1 , $A_2\subset$ E et B $\subset$ F .

1)Monter que :

a) $(A_1 \cup A_2 \times B) = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$

b) $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$

c) Donner les mêmes résultats pour $A \times (B_1 \cap B_2)$ et : $A \times (B_1 \cup B_2)$.

Solution : Établissons ce résultat seulement pour l'union (la démonstration est identique pour l'intersection) :

$(x, y) \in (A_1 \cup A_2) \times B \Leftrightarrow x \in A_1 \cup A_2$ et $y \in B$

$\Leftrightarrow (x \in A_1$ et $y \in B)$ ou $(x \in A_2$ et $y \in B) \Leftrightarrow (x, y) \in A_1 \times B$ ou $(x, y) \in A_2 \times B$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$

Exercice9 : Soient l'ensemble :

$L=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 1\}$ et $G=[-1;1]$

1) Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$
2) Monter que : $L\subset G^2$ et $L\neq G^2$

Solution : On suppose : qu'il existe deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

On a : $(1;0)\in L$ et $(0;1)\in L$

Donc : $1\in A$ et $1\in B$ car $L=A\times B$

Donc : $(1;1)\in A\times B$ cad $(1;1)\in L$

Donc contradiction car : $1^2+1^2\succ 1$

Conclusion il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

2) Montrons que : $L\subset G^2$ et $L\neq G^2$

Soit un élément $(x;y)\in L$ montrons que $(x;y)\in G^2$?

$(x;y)\in L\Rightarrow x^2+y^2\leq 1$

Comme : $x^2\leq x^2+y^2\leq 1$ et $y^2\leq x^2+y^2\leq 1$

Alors : $x^2\leq 1$ et $y^2\leq 1\Rightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{1}$ et $\sqrt{y^2}\leq\sqrt{1}$

$\Rightarrow |x|\leq\sqrt{1}$ et $|y|\leq\sqrt{1}\Rightarrow -1\leq x\leq 1$ et $-1\leq y\leq 1$

$\Rightarrow x\in[-1;1]$ et $y\in[-1;1]\Rightarrow (x;y)\in G^2$

Par suite : $L\subset G^2$

Comme : $1\in G$ Donc : $(1;1)\in G^2$

Mais : $(1;1)\notin L$ car : $1^2+1^2\succ 1$

Alors : $L\neq G^2$

Exercice10 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; On pose : $\forall k\in\{0;1;2;....;n-1\}=E$; $I_k=\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$

1) Montrer que : $\forall k\in E\ \ I_k\subset[0;1[$

2) Montrer que : $\forall(k;k')\in E^2$; $k\neq k'\ \Rightarrow\ I_k\cap I_{k'}=\varnothing$

Solution : 1) Montrons : $\forall k\in E\ \ I_k\subset[0;1[$

Soit : $k\in E$ et $x\in I_k$ Montrons que : $x\in[0;1[$???

On a : $x\in I_k$ donc : $x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$

Donc : $\frac{k}{n}\leq x\prec\frac{k+1}{n}$ or : $0\leq k\leq n-1$

Donc : $1\leq k+1\leq n\Rightarrow\frac{1}{n}\leq\frac{k+1}{n}\leq 1$

Donc : $0\leq\frac{k}{n}\leq x\prec\frac{k+1}{n}\leq 1\Rightarrow 0\leq x\prec 1\Rightarrow x\in[0;1[$

Donc : $\forall k\in E\ \ I_k\subset[0;1[$

2) Montrons que : $\forall(k;k')\in E^2$

$k\neq k'\ \Rightarrow\ I_k\cap I_{k'}=\varnothing$

Supposons que : $k\neq k'$ *et* $I_k\cap I_{k'}\neq\varnothing$

$k \neq k'$ et $I_k \cap I_{k'} \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in I_k \cap I_{k'}$ avec : $k \neq k'$

Donc : $x \in I_k$ et $x \in I_{k'}$ avec : $k \neq k'$

Supposons que par exemple que : $k \prec k'$

$k \prec k' \Rightarrow k+1 \leq k' \Rightarrow \frac{k+1}{n} \leq \frac{k'}{n}$ ©

$x \in I_k \Rightarrow \frac{k}{n} \leq x \prec \frac{k+1}{n}$ ①

$x \in I_{k'} \Rightarrow \frac{k'}{n} \leq x \prec \frac{k'+1}{n}$ ②

① et ② et © $\Rightarrow \frac{k}{n} \leq x \prec \frac{k+1}{n} \leq \frac{k'}{n} \leq x \Rightarrow x \prec x$

Absurde : Donc : $\forall (k;k') \in E^2$; $k \neq k' \Rightarrow I_k \cap I_{k'} = \varnothing$

Exercice11 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x-|x|+3 \end{array}$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Solution : $f(x)=2x-|x|+3$

Si $x \in]-\infty;0]$ alors : $f(x)=2x+x+3=3x+3$

Donc : la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$ est l'application $\begin{array}{l} g:]-\infty;0] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x+3 \end{array}$

Exercice12 : Soit les applications :

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2|x|-x \end{array}$

Est-ce que g est un prolongement de f ?

Solution : $g(x)=2|x|-x=x$ Si $x \in \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

Donc : g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$

Exercice13: Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$

Montrer que : $f^{-1}([-1;1])=\mathbb{R}$

Solution :

$x \in f^{-1}([-1;1]) \Leftrightarrow f(x) \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow |f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|2x|}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow |2x| \leq x^2+1$

$\Leftrightarrow 0 \leq |x|^2-2|x|+1 \Leftrightarrow 0 \leq (|x|-1)^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}([-1;1])=\mathbb{R}$

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)=\begin{cases} 1 & si:\ x \prec 0 \\ 1+x & si:\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$

1) Déterminer les ensembles suivants : $f(\mathbb{R})$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}(\{1\})$; $f^{-1}(\{-1\})$; $f^{-1}(]1;2])$

2) a) f est injective ? b) f est-elle surjective ?

Solution : 1) a) On a :

$f(\mathbb{R})=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}$

Comme : $\mathbb{R}=\mathbb{R}_-^*\cup\mathbb{R}^+$ alors :

$f(\mathbb{R})=f(\mathbb{R}_-^*\cup\mathbb{R}^+)=f(\mathbb{R}_-^*)\cup f(\mathbb{R}^+)$

On a : $f(\mathbb{R}_-^*)=\{1\}$ et $f(\mathbb{R}^+)=\{x+1/x\in\mathbb{R}^+\}=[1;+\infty[$

Ce qui donne : $f(\mathbb{R})=\{1\}\cup[1;+\infty[=[1;+\infty[$

b) $f^{-1}(\{0\})=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\{0\}\}=\{x\in\mathbb{R}/f(x)=0\}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $f(x)=0$

Sur : $\mathbb{R}_-^*$ l'équation : $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

Sur : $\mathbb{R}^+$ $f(x)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1\notin\mathbb{R}^+$

D'où : l'équation : $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}(\{0\})=\varnothing$

c) $f^{-1}(\{1\})=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\{1\}\}=\{x\in\mathbb{R}/f(x)=1\}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $f(x)=1$

$\forall x\in\mathbb{R}_-^*$ $f(x)=1$

Sur : $\mathbb{R}^+$ $f(x)=1\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0\in\mathbb{R}^+$

On obtient alors : $f^{-1}(\{1\})=\{0\}\cup\mathbb{R}_-^*=\mathbb{R}^-$

d) $f^{-1}(\{-1\})=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\{-1\}\}=\{x\in\mathbb{R}/f(x)=-1\}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $f(x)=-1$

Sur : $\mathbb{R}_-^*$ l'équation : $f(x)=-1$ n'admet pas de solution.

Sur : $\mathbb{R}^+$ $f(x)=-1\Leftrightarrow x+1=-1\Leftrightarrow x=-2\notin\mathbb{R}^+$

D'où : l'équation : $f(x)=-1$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}(\{-1\})=\varnothing$

e) $f^{-1}(]1;2])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in]1;2]\}$

$f^{-1}(]1;2])=\{x\in\mathbb{R}/1\prec x+1\leq 2\}$

Il est clair qu'il n'existe pas de réels négatifs ayant une image positive.

$\forall x\in\mathbb{R}^+$: $1\prec x+1\leq 2\Leftrightarrow 0\prec x\leq 1$

Ainsi : $f^{-1}(]1;2])=]0;1]$

2) a) - f n'est pas injective car :

$f(-2)=f(-1)=1$ et $-2\neq -1$

b) f n'est pas surjective car par exemple 0 et -1 n'ont pas d'antécédents. En général, tous les éléments de l'intervalle $]-\infty;1[$ n'ont pas d'antécédents par l'application f.

Exercice15 : Soit f l'application : $\begin{array}{l} :]2;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\end{array}$

1)Montrer que : f est injective

2)l'application $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\end{array}$ est-elle injective ? justifier

Solution : Montrons que : f est injective : Soient $x_1 \in]2;+\infty[$ et $x_2 \in]2;+\infty[$

Montrons que : $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$?

Supposons que : $f(x_1)=f(x_2)$

Donc : $\dfrac{\sqrt{x_1}}{x_1+2}=\dfrac{\sqrt{x_2}}{x_2+2} \Rightarrow (x_2+2)\sqrt{x_1}=(x_1+2)\sqrt{x_2} \Rightarrow x_2\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_1}=x_1\sqrt{x_2}+2\sqrt{x_2}$

$\Rightarrow x_2\sqrt{x_1}-x_1\sqrt{x_2}+2\sqrt{x_1}-2\sqrt{x_2}=0 \Rightarrow \sqrt{x_1x_2}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)-2\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_1x_2}-2\right)=0$

$\Rightarrow \sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=0 \ ou \ \sqrt{x_1x_2}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x_2}=\sqrt{x_1} \ ou \ \sqrt{x_1x_2}=2 \Rightarrow x_2=x_1 \ ou \ x_2x_1=4$

Or : $x_1 \in]2;+\infty[$ et $x_2 \in]2;+\infty[$ donc : $x_2x_1 \succ 4 \Rightarrow x_2x_1 \neq 4$

Donc : $\dfrac{\sqrt{x_1}}{x_1+2}=\dfrac{\sqrt{x_2}}{x_2+2} \Rightarrow x_2=x_1$

Par suite : f est injective

2) Montrons que : $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\end{array}$ n'est pas injective

On prend : $x_1=1 \ et \ x_2=4$: $g(1)=\dfrac{\sqrt{1}}{1+2}=\dfrac{1}{3}$ et $g(4)=\dfrac{\sqrt{4}}{4+2}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

On a donc : $1\neq 4$ mais : $g(1)=g(4)$

Ceci signifie que l'application g n'est pas injective

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\end{array}$

1) Montrer que f n'est pas surjective

2) Montrer que $f(\mathbb{R}^+)=\left[-\dfrac{1}{3};1\right[$

3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[-\dfrac{1}{3};1\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

Soit $y\in\mathbb{R}$: Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}=y \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=y\left(\sqrt{x}+3\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-y\sqrt{x}=3y+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-y)=3y+1$

Pour : $y=1$ on a : $0=+1$ absurde

Puisque l'équation $f(x)$ = 1 n'admet pas de solution

Donc : f n'est pas surjective

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$; $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}+3-3-1}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}-\frac{4}{\sqrt{x}+3}$

Donc : $f(x)=1-\frac{4}{\sqrt{x}+3}$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3$

$\Rightarrow 0 \prec \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{-4}{\sqrt{x}+3} \prec 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}+1 \leq \frac{-4}{\sqrt{x}+3}+1 \prec 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq 1-\frac{4}{\sqrt{x}+3} \prec 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq f(x) \prec 1$

Donc : $f(\mathbb{R}^+) \subset \left[-\frac{1}{3};1\right[$

Inversement : Soit $y \in \left[-\frac{1}{3};1\right[$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}=y \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=y\left(\sqrt{x}+3\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-y\sqrt{x}=3y+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-y)=3y+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{3y+1}{1-y}$ et Puisque $y \in \left[-\frac{1}{3};1\right[$

Alors : $-\frac{1}{3} \leq y \prec 1 \Rightarrow -1 \leq 3y \prec 3 \Rightarrow 0 \leq 3y+1 \ et \ 1-y \succ 0$

Donc : $\frac{3y+1}{1-y} \geq 0$

Par suite : $\sqrt{x}=\frac{3y+1}{1-y} \Leftrightarrow x=\left(\frac{3y+1}{1-y}\right)^2 \geq 0$

Donc : il existe un $x \in \mathbb{R}^+$ tel que : $f(x) = y$

Donc : $y \in \left[-\frac{1}{3};1\right[\Rightarrow y \in f(\mathbb{R}^+)$

Donc : $\left[-\frac{1}{3};1\right[\subset f(\mathbb{R}^+)$ par suite : $f(\mathbb{R}^+)=\left[-\frac{1}{3};1\right[$

3) Soit $y \in \left[-\frac{1}{3};1\right[$: Résolvons l'équation : $f(x) = y$

La même démarche donne : $f(x)=y \Leftrightarrow x=\left(\frac{3y+1}{1-y}\right)^2 \geq 0$

Donc : $\forall y \in \left[-\frac{1}{3};1\right[; \exists! x \in \mathbb{R}^+ / f(x)=y$

Conclusion : f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[-\frac{1}{3};1\right[$

$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\left(\frac{3y+1}{1-y}\right)^2$ et $f^{-1}:\left[-\frac{1}{3};1\right[\to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto \left(\frac{3x+1}{1-x}\right)^2$

Exercice17: Soit les applications suivantes :

$f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sin(x)\end{array}$ $g:\begin{array}{l}\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}\\ (n;p)\mapsto n+p\end{array}$ $h:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\mapsto(x+3y\ ;x-y)\end{array}$

1) a) f est-elle injective ? b) f est-elle surjective ?
2) Montrer que g est surjective
3) Déterminer : $g\left(\mathbb{N}^2\right)$
4) Déterminer : $g^{-1}\left(\{2\}\right)$
5) g est-elle injective ?
6) Montrer que h est bijective
7) Déterminer : h^{-1}
8) Déterminer : $h\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $h^{-1}\left(\mathbb{R}^2\right)$

Solution : 1) a) On a : $f(0)=\sin 0=0$ et $f(\pi)=\sin\pi=0$

Donc : : $\exists 0\in\mathbb{R}$; $\exists\pi\in\mathbb{R}$: $f(0)=f(\pi)$ Mais $0\neq\pi$

Donc : f n'est pas injective

b) Si je trouve : $y\in\mathbb{R}$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$ on peut affirmer que f n'est pas surjective.

Si je prends : $y=2$ Il n'existe pas : $x\in\mathbb{R}$ tel que : $\sin x=2$

C'est-à-dire : 2 n'a pas d'antécédents

Donc : f n'est pas surjective.

2) g : $\begin{array}{l}\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}\\ (n;p)\mapsto n+p\end{array}$ Montrons que g est surjective.

g est surjective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall p\in\mathbb{N}$; $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Tel que : $g(n;m)=p$ c'est-à-dire : $n+m=p$

Soit : $p\in\mathbb{N}$

Si : $p=0$ alors : $0+0=0=p$

Donc : $\exists(0;0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $0+0=p$

Si : $p\neq 0$ alors : $p\geq 1$ Alors : $\underbrace{(p-1)}_{n}+\underbrace{1}_{m}=p$

Il suffit de prendre : $n=p-1$ car : $m=1$

Donc : $\exists(n=p-1;m=1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $n+m=p$

C'est-à-dire : $\forall p\in\mathbb{N}$; $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; tel que : $g(n;m)=p$

Donc : g est surjective.

3) Déterminons : $g\left(\mathbb{N}^2\right)$

Puisque : g est surjective alors : $g\left(\mathbb{N}^2\right)=\mathbb{N}$

4) Déterminons : $g^{-1}\left(\{2\}\right)$

$(n;m)\in g^{-1}\left(\{2\}\right)\Leftrightarrow(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ et\ g(n;m)=2$

$\Leftrightarrow(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ et\ n+m=2$

$\Leftrightarrow (n;m) \in \{(0;2);(2;0);(1;1)\}$

Donc : $g^{-1}(\{2\}) = \{(0;2);(2;0);(1;1)\}$

5) $g : \begin{array}{l} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ (n;p) \mapsto n+p \end{array}$

On a : $g(0;2) = g(1;1) = 2$ et $(0;2) \neq (1;1)$

Donc : g n'est pas injective.

6) $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x+3y\ ;\ x-y) \end{array}$ Montrons que h est bijective :

Soit : $(z;t) \in \mathbb{R}^2$; $\exists?!(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $h(x;y) = (z;t)$??

$h(x;y) = (z;t) \Leftrightarrow (x+3y\ ;\ x-y) = (z;t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = z \\ x-y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = z-t \\ x-y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{z-t}{4} \\ x = y+t = \dfrac{z-t}{4}+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z+3t}{4} \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{z-t}{4} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\forall (z;t) \in \mathbb{R}^2$; $\exists!(x;y) \in \mathbb{R}^2$ Tel que : $h(x;y) = (z;t)$

Donc : h bijective

7) Déterminons h^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$h(x;y) = (z;t) \Leftrightarrow (x;y) = h^{-1}(z;t) = \left(\dfrac{z+3t}{4};\dfrac{z-t}{4}\right)$

Donc : $h^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto \left(\dfrac{x+3y}{4};\dfrac{x-y}{4}\right) \end{array}$

8) Déterminons : $h(\mathbb{R}^2)$ et $h^{-1}(\mathbb{R}^2)$

Puisque : h et h^{-1} sont surjectives alors : $h(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ et $h^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien