1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°6 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : On considère dans $\mathbb{Z}$ les deux parties suivantes :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x+10}{x-5}\in\mathbb{Z}\right\}$

1)a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\})\ \frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$

1)b) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\ \frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

2) Déterminer : A ; B ; $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$ en extension

3) On admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de $\mathbb{Z}$: $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A\Delta X=B$

Exercice2 : Soient les ensembles : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^3+y^3=1\}$ et $I=[-1;1]$

1) Montrer que : $E\neq\varnothing$ et $F\neq\varnothing$

2) Montrer que : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

3) Montrer que : $E\subset I\times I$ et $E\neq I\times I$

Exercice3 : Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E

Montrons que : A ∪ B = A ∩ B ⟹ A = B

Exercice4 : Soit l'application $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+2x\end{array}$

Montrer que : $f([-1;1])=[-1;3]$

Exercice5 : Soit l'application : $\begin{array}{l}f:[1;+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x+\sqrt{x^2-x}\end{array}$

Montrer que f est injective

Exercice6 : Soit l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\cos x\end{array}$ Déterminer : $f^{-1}(D)$ avec $D=]1;2]$

Exercice7 : Soit l'application $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+3x+\frac{9}{4}\end{array}$

1) a) Calculer : $f(0)$ et $f(-3)$ et $f^{-1}(\{-1\})$

b) f est-elle injective ? justifier

c) f est-elle surjective ? justifier

d) f est-elle bijective ? justifier

2) Déterminer les intervalles I et J pour que : l'application f : $\begin{array}{l}I\to J\\ x\mapsto f(x)\end{array}$ soit bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice8 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} [2;+\infty[\to [1;+\infty[\\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 5 \end{array}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice9 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto \dfrac{1}{n^2 - 2n + 3} \end{array}$

f est-elle injective ? justifier

Exercice10 : Soit l'ensemble : $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y - x + 1 \geq 0\}$

Et soit l'application f : $\begin{array}{l}]1;+\infty[\times \mathbb{R} \to D \\ (x;y) \mapsto (2x+y \;;x^2+y) \end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est Surjective
3) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f.

Exercice11 : Soit E un ensemble non vide et soient A ; B des parties de E tel que : $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$

Soit l'application f : $\begin{array}{l} P(E) \to P(A) \times P(B) \\ X \mapsto (A \cap X; B \cap X) \end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Exercice12 : Soient E, F et G trois ensemble et soient : f: $E \to F$ et g: $F \to G$ deux applications.
1) Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2) Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3)Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4) Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. 6) Si à présent f : $E \to F$ et g : $F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
a) $g \circ f = Id_E$ b) $f \circ g = Id_F$ c) $f \circ f = Id_E$
7) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective
8) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective

Exercice13 : Soient E et F deux ensembles non vides et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E et Soient A' et B' deux parties de F
1) Montrer que : si A $\subset B$ alors : $f(A) \subset f(B)$
2) Montrer que : si A' $\subset B'$ alors : $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

Exercice14 : Soient E et F deux ensembles non vides et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, Montrer que : 1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte.
3)Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien