1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°6 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : On considère dans $\mathbb{Z}$ les deux parties suivantes :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x+10}{x-5}\in\mathbb{Z}\right\}$

1)a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\})\frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$

1)b) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

2) Déterminer : A ; B ; $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$ en extension

3)On admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de $\mathbb{Z}$: $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A\Delta X=B$

Solution : 1) a) il est aisé de voir que :

$(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\})\frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$

1) b) il est aisé aussi de voir que

$(\forall x\in\mathbb{Z})2x-1+\frac{9}{2x-1}=+\frac{(2x-1)^2+9}{2x-1}=\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}$

2) Détermination de : A ?

On a : $A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $(\forall x\in\mathbb{Z})2x-1\in\mathbb{Z}$ et $\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

En déduit que : $(\forall x\in\mathbb{Z})$; $x\in A\Leftrightarrow\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x-1+\frac{9}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{9}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x-1 divise 9$

$\Leftrightarrow 2x-1\in\{-9;-3;-1;1;3;9\}\Leftrightarrow 2x\in\{-8;-2;0;2;4;10\}$

$\Leftrightarrow x\in\{-4;-1;0;1;2;5\}$ Donc : $A=\{-4;-1;0;1;2;5\}$

Détermination de : B ?

Soit $x\in\mathbb{Z}$ de façon analogue nous pouvons écrire :

$x\in B\Leftrightarrow x\neq 5 et x-5 divise 15$

$\Leftrightarrow x-5\in\{-15;-5;-3;-1;1;3;5;15\}$

$\Leftrightarrow x\in\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$

Donc : $B=\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$

Détermination de : $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$?

$A-B=\{-4;-1;0;1;2;5\}-\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}=\{-4;-1;1;5\}$

$A-B=\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}-\{-4;-1;0;1;2;5\}=\{-10;4;6;8;10;20\}$

$A\Delta B=(A-B)\cup(A-B)=\{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

3)Résolution dans $P(\mathbb{Z})$ de l'équation : $A\Delta X=B$

On trouve : $X=\{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

Exercice2 : Soient les ensembles : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^3+y^3=1\}$ et $I=[-1;1]$

1) Montrer que : $E\neq\varnothing$ et $F\neq\varnothing$

2) Montrer que : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

3) Montrer que : $E\subset I\times I$ et $E\neq I\times I$

Solution : 1)

On a : $(0;1)\in E$ car : $0^2+1^2=1$ donc : $E\neq\varnothing$

On a : $(0;1)\in F$ car : $0^3+1^3=1$ donc : $F\neq\varnothing$

2) Montrons par double inclusion que : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

a) Montrons que : $(x;y)\in\{(1;0);(0;1)\}$?

Soit : $(x;y)\in E\cap F$

Donc : $(x;y)\in E$ *et* $(x;y)\in F$

Donc : $x^2+y^2=1$ et $x^3+y^3=1$

Donc : $x^2+y^2=x^3+y^3$

Donc : $x^2+y^2-x^3-y^3=0$

Donc : $x^2(1-x)+y^2(1-y)=0$

Et comme : $x^2\leq x^2+y^2=1$ et $y^2\leq x^2+y^2=1$

Alors : $x^2\leq 1$ et $y^2\leq 1$

Alors : $|x|\leq 1$ et $|y|\leq 1$

Alors : $0\leq 1-x$ et $0\leq 1-y$

Donc : $\underbrace{x^2(1-x)}_{\geq 0}+\underbrace{y^2(1-y)}_{\geq 0}=0$

Donc : $x^2(1-x)=0$ et $y^2(1-y)=0$

Donc : $(x=0$ *ou* $x=1)$ et $(y=0$ *ou* $y=1)$

Donc : $(x=0$ *et* $y=0)$ ou $(x=0$ *et* $y=1)$ ou $(x=1$ *et* $y=0)$ ou $(x=1$ *et* $y=1)$

Donc : $(x;y)=(0;0)$ ou $(x;y)=(0;1)$ ou $(x;y)=(1;0)$ ou $(x;y)=(1;1)$

Mais : $(x;y)\in E\cap F$ donc : $(x;y)=(0;0)$

$(0;0)\notin E$ Car : $0^2+0^2\neq 1$

$(1;1)\notin E$ Car : $1^2+1^2\neq 1$

Donc : $(x;y)\in\{(1;0);(0;1)\}$.

a) Montrons que : $\{(1;0);(0;1)\}\subset E\cap F$?

On a : $(0;1)\in E$ et $(0;1)\in F$

Car : $0^2+1^2=1$ Et $0^3+1^3=1$

Et on a : $(1;0)\in E$ et $(1;0)\in F$

Car : $0^2+1^2=1$ Et $0^3+1^3=1$

Donc : $\{(1;0);(0;1)\}\subset E\cap F$

Par suite : $E\cap F=\{(1;0);(0;1)\}$

3) Montrons que : $E \subset I \times I$ avec : $I = [-1;1]$

Soit : $(x;y) \in E$

Donc : $x^2 + y^2 = 1$

Et comme : $x^2 \leq x^2 + y^2 = 1$ et $y^2 \leq x^2 + y^2 = 1$

Alors : $x^2 \leq 1$ et $y^2 \leq 1$

Alors : $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

Alors : $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$

Donc : $x \in I$ et $y \in I$

Donc : $(x;y) \in I \times I$

Par suite : $E \subset I \times I$

b) Comme : $(1;1) \in I \times I$ et $(1;1) \notin E$ $(1^2 + 1^2 \neq 1)$

Alors : $I \times I \not\subset E$

Par suite : $E \neq I \times I$

Exercice3 : Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E

Montrons que : A ∪ B = A ∩ B $\Longrightarrow$ A = B

Solution : Pour ce faire, nous allons utiliser une technique très importante : la double inclusion.

Le principe est d'utiliser l'équivalence suivante :

A = B équivaut à A ⊆ B et B ⊆ A.

- Montrons que A ⊆ B. Par définition de l'inclusion, nous devons donc montrer que : Pour tout a ∈ A, on a que a ∈ B. Soit : a ∈ A.

Par définition de l'union, an a alors que : a ∈ A ∪ B. Or, A ∪ B = A ∩ B, donc : a ∈ A ∩ B.

Par définition de l'intersection, on a alors a ∈ B.

Conclusion : Pour tout a ∈ A, on a que : a ∈ B,

Donc : A ⊆ B.

- Montrons que B ⊆ A. L'énoncé est symétrique en A et B, et A ⊆ B, donc B ⊆ A.

Conclusion : On a bien montré que : A ⊆ B et B ⊆ A,

C'est-à-dire : A = B

Exercice4 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2x \end{array}$

Montrer que : $f([-1;1]) = [-1;3]$

Solution : Montrons que : $f([-1;1]) = [-1;3]$

On raisonne par double inclusion :

a) Montrons que : $f([-1;1]) \subset [-1;3]$

Soit : $x \in [-1;1]$ Montrons que : $f(x) \in [-1;3]$

C'est-à-dire Montrons que : $-1 \leq f(x) \leq 3$

✓ $f(x) - (-1) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$

Donc : $-1 \leq f(x)$

✓ $f(x) - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x+1)^2 - 4$

$x \in [-1;1] \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x+1)^2 \leq 4 \Rightarrow (x+1)^2 - 4 \leq 0$

Donc : $f(x) \leq -1$

Par suite : $-1 \leq f(x) \leq 3$ C'est-à-dire $f(x) \in [-1;3]$

Alors : $f([-1;1]) \subset [-1;3]$

b) Inversement montrons que : $[-1;3]\subset f([-1;1])$

Soit : $y\in[-1;3]$

Montrons que : $\exists x\in[-1;1]$ tel que : $f(x)=y$?

$f(x)=y \Leftrightarrow x^2+2x=y \Leftrightarrow x^2+2x+1=y+1 \Leftrightarrow (x+1)^2=y+1$

Comme : $y\in[-1;3]$ alors : $y+1\geq 0$

Comme : $x\in[-1;1]$ alors : $x+1\geq 0$

$\Leftrightarrow x+1=\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x=\sqrt{y+1}-1$

Comme : $y\in[-1;3]$ alors : $0\leq y+1\leq 4$

Alors : $0\leq\sqrt{y+1}\leq 2$

Alors : $-1\leq\sqrt{y+1}-1\leq 1$

Alors : $-1\leq x\leq 1$

Donc : $\exists x\in[-1;1]$ tel que : $f(x)=y$

Ce qui signifie : $[-1;3]\subset f([-1;1])$

Conclusion : $f([-1;1])=[-1;3]$

Exercice5 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x+\sqrt{x^2-x}\end{array}$

Montrer que f est injective

Solution : Soient $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\sqrt{x_1^2-x_1}=x_2+\sqrt{x_2^2-x_2}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1^2-x_1}-\sqrt{x_2^2-x_2}=x_2-x_1$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1^2-x_1}-\sqrt{x_2^2-x_2}\right)^2=(x_2-x_1)^2$

$\Rightarrow x_1^2-x_1-2\sqrt{(x_1^2-x_1)(x_2^2-x_2)}+x_2^2-x_2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$

$\Rightarrow 2x_1x_2-x_1-x_2-2\sqrt{(x_1^2-x_1)(x_2^2-x_2)}=0$

$\Rightarrow x_1x_2+x_1x_2-x_1-x_2-2\sqrt{x_1(x_1-1)x_2(x_2-1)}=0$

$\Rightarrow x_1x_2-x_1+x_1x_2-x_2-2\sqrt{x_1(x_1-1)x_2(x_2-1)}=0$

$\Rightarrow x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)-2\sqrt{x_1(x_1-1)x_2(x_2-1)}=0$

$\Rightarrow \sqrt{x_1(x_2-1)}^2+\sqrt{x_2(x_1-1)}^2-2\sqrt{x_1(x_2-1)\times x_2(x_1-1)}=0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1(x_2-1)}-\sqrt{x_2(x_1-1)}\right)^2=0$

$\Rightarrow \sqrt{x_1(x_2-1)}-\sqrt{x_2(x_1-1)}=0$

$\Rightarrow \sqrt{x_1(x_2-1)}=\sqrt{x_2(x_1-1)} \Rightarrow x_1(x_2-1)=x_2(x_1-1)$

$\Rightarrow x_2x_1-x_1=x_2x_1-x_2 \Rightarrow -x_1=-x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ Donc f est injective

Exercice6 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \cos x \end{array}$ Déterminer : $f^{-1}(D)$ avec $D=]1;2]$

Solution : $f^{-1}(D)=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in D\}=\{x\in\mathbb{R}/1\prec f(x)\leq 2\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/1\prec\cos x\leq 2\}=\varnothing$

Car $\forall x\in\mathbb{R}/-1\leq\cos x\leq 1$ donc $f^{-1}(D)=\varnothing$

Exercice7 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+3x+\dfrac{9}{4} \end{array}$

1) a) Calculer : $f(0)$ et $f(-3)$ et $f^{-1}(\{-1\})$

b) f est-elle injective ? justifier

c) f est-elle surjective ? justifier

d) f est-elle bijective ? justifier

2) Déterminer les intervalles I et J pour que : l'application f : $\begin{array}{l} :I\to J \\ x\mapsto f(x) \end{array}$ soit bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Solution : $f(x)=x^2+3x+\dfrac{9}{4}$

1) a) $f(0)=0^2+3\times 0+\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}$; $f(-3)=(-3)^2+3\times(-3)+\dfrac{9}{4}=9-9+\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}$

$f^{-1}(\{-1\})=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\{-1\}\}=\{x\in\mathbb{R}/f(x)=-1\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+\dfrac{9}{4}=-1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+\dfrac{13}{4}=0\right\}$

$x^2+3x+\dfrac{13}{4}=0$ $\quad\Delta=3^2-4\times 1\times\dfrac{13}{4}=9-13=-4\prec 0$

Donc : pas de solutions

Donc : $f^{-1}(\{-1\})=\varnothing$

b) Si je trouve : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $f(0)=f(-3)=\dfrac{9}{4}$ mais $0\neq -3$

Donc : f n'est pas injective

c) Par exemple : -1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=-1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Donc : f n'est pas surjective

2) f $\begin{array}{l} :I\to J \\ x\mapsto f(x) \end{array}$

a) Soient $x_1\in I$ et $x_2\in I$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1{}^2+3x_1+\dfrac{9}{4}=x_2{}^2+3x_2+\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow x_1{}^2-x_2{}^2+3x_1-3x_2=0\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)+3(x_1-x_2)=0$

$\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2+3)=0\Rightarrow x_1-x_2=0\ \ ou\ \ x_1+x_2+3=0$

Si je prends : $x_1+x_2+3\neq 0$ alors f est injective.

Par exemple : $x_1\in\left[\dfrac{-3}{2};+\infty\right[$ et $x_2\in\left[\dfrac{-3}{2};+\infty\right[$

Alors : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

En effet : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1-x_2=0 \;\; ou \;\; x_1+x_2+3=0$

$\Rightarrow x_1=x_2 \;\; ou \;\; x_1+x_2+3=0$

On a : $x_1\geq\frac{-3}{2}$ et $x_2\geq\frac{-3}{2}\Rightarrow x_1+x_2+3\geq 0$

Si $x_1=\frac{-3}{2}$ et $x_2=\frac{-3}{2}$ alors : $x_1=x_2$

Si $x_1\succ\frac{-3}{2}$ ou $x_2\succ\frac{-3}{2}\Rightarrow x_1+x_2+3\succ 0$

$\Rightarrow x_1=x_2$

Dans tous les cas f est injective. Si f $:\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\to J$
$x\mapsto f(x)$

b) Etudions la subjectivité de f :

$f(x)=x^2+3x+\frac{9}{4}=x^2+2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$

Soient $y\in J$: Résolvons l'équation : $f(x)=y$

$\begin{cases}f(x)=y\\ x\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=y\\ x\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{3}{2}=\sqrt{y}\\ y\in[0;+\infty[\end{cases}\;\begin{cases}f(x)=y\\ x\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{y}-\frac{3}{2}\\ y\in[0;+\infty[\end{cases}$

($\forall\, y\in[0;+\infty[$) ($\exists\,!\; \boldsymbol{x}\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$) ($\boldsymbol{f(x)=y}$)

Donc : f est une bijection de $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ vers $[0;+\infty[$

Donc : $f^{-1}:\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[\to[0;+\infty[$
$x\mapsto\sqrt{x}-\frac{3}{2}$

Exercice8 : Soit l'application f : $:[2;+\infty[\to[1;+\infty[$
$x\mapsto f(x)=x^2-4x+5$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y\in[1;+\infty[$

Résolvons dans : $[2;+\infty[$ l'équation $f(x)=y$

Soit : $x\in[2;+\infty[$

$f(x)=y\Leftrightarrow x^2-4x+5=y\Leftrightarrow x^2-4x+4+1=y$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+1=y\Leftrightarrow(x-2)^2=y-1$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{y-1}$ car $y\in[1;+\infty[$

$\Leftrightarrow|x-2|=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow x-2=\sqrt{y-1}$ car $x\in[2;+\infty[$

$f(x)=y\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}+2$

Comme : $\sqrt{y-1}+2\geq 2$ c'est-à-dire : $x\in[2;+\infty[$

Donc : $y \in [1;+\infty[\ \exists! x \in [2;+\infty[$ tel que : $f(x) = y$

Donc : f est bijective.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in [2;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}+2 \\ y \in [1;+\infty[\end{cases}$$

Donc : $\forall x \in [1;+\infty[\ ; \ f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}+2$

$f^{-1} : [1;+\infty[\to [2;+\infty[$

$x \mapsto f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}+2$

Exercice9 : Soit l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto \dfrac{1}{n^2-2n+3} \end{array}$

f est-elle injective ? justifier

Solution : *Démarche1 :* Si je trouve : $n \neq m$ et $f(n) = f(m)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $f(0) = \frac{1}{3}$ et $f(2) = \frac{1}{3}$

On a : donc $f(0) = f(2)$ mais $0 \neq 2$

Donc : f n'est pas injective

Démarche2 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

$f(n) = f(m) \Rightarrow \dfrac{1}{n^2-2n+3} = \dfrac{1}{m^2-2m+3}$

$\Rightarrow n^2-2n+3 = m^2-2m+3$

$\Rightarrow n^2-m^2-2(n-m) = 0$

$\Rightarrow (n-m)(n+m)-2(n-m) = 0$

$\Rightarrow (n-m)(n+m-2) = 0$

$\Rightarrow n-m = 0 \ \ ou \ \ n+m-2 = 0 \Rightarrow n = m \ \ ou \ \ m = 2-n$

Pour : $n = 2 \ \ et \ \ m = 2-2 = 0$ on a ; $f(n) = f(m)$

Donc : f n'est pas injective

Exercice10 : Soit l'ensemble : $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y-x+1 \geq 0\}$

Et soit l'application $f : \begin{array}{l}]1;+\infty[\times \mathbb{R} \to D \\ (x;y) \mapsto (2x+y \ ; x^2+y) \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est Surjective

3) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f .

Solution : 1) Soit : $(x;y) \,;\, (x';y') \in]1;+\infty[\times \mathbb{R}$

Tel que : $f(x;y) = f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y) = (x';y')$??

$f(x;y) = f(x';y') \Leftrightarrow (2x+y \ ; x^2+y) = (2x'+y' \ ; x'^2+y')$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 2x'+y' \\ x^2+y = x'^2+y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-x') = y'-y & (1) \\ x^2-x'^2 = y'-y & (2) \end{cases} \quad (1) et (2) \Rightarrow x^2-x'^2 = 2(x-x')$

$\Rightarrow (x-x')(x+x')-2(x-x') = 0 \Rightarrow (x-x')(x+x'-2) = 0$

$\Rightarrow x-x'=0 \quad ou \quad x+x'-2=0 \Rightarrow x=x' \quad ou \quad x+x'=2$

On a : $(x;y)\,;\,(x';y')\in\left]1;+\infty\right[\times\mathbb{R}$

Donc : $x\in\left]1;+\infty\right[$ et $x'\in\left]1;+\infty\right[$

Donc : $x\succ 1$ et $x'\succ 1$

Donc : $x+x'\succ 2$ par suite ; $x+x'\neq 2$

Et donc : $x=x'$

$2(x-x')=y'-y \quad (1)\Rightarrow 0=y'-y\Rightarrow y=y'$

$\Rightarrow (x;y)=(x';y')$

Donc : f est injective

2) Soient $(a;b)\in D$: Résolvons l'équation : $f(x;y)=(a;b)$ dans : $\left]1;+\infty\right[\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x;y)=(a;b) \\ \left]1;+\infty\right[\times\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow (2x+y\ ;x^2+y)=(a\ ;b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=a \\ x^2+y=b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=b-a \\ y=b-x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-b+a=0 \\ y=b-x^2 \end{cases}$$

$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-b+a)=4+4b-4a=4(1+b-a)\geq 0$

Comme : $(a;b)\in D$ Donc : $1+b-a\geq 0$

Et donc : $\Delta=4(1+b-a)\geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$x=\dfrac{2+\sqrt{4(1+b-a)}}{2}=1+\sqrt{1+b-a}\in\left]1;+\infty\right[$ ou $x=\dfrac{2-\sqrt{4(1+b-a)}}{2}=1-\sqrt{1+b-a}\notin\left]1;+\infty\right[$

Et il suffit de remplacer x dans : $y=b-x^2$

Pour trouver y :

Donc : $y=b-\left(1+\sqrt{1+b-a}\right)^2\in\mathbb{R}$

Donc : $\forall(a;b)\in D$; $\exists(x;y)\in\left]1;+\infty\right[\times\mathbb{R}$ $f(x;y)=(a;b)$

Alors f est Surjective

f est une bijection de $\left]1;+\infty\right[\times\mathbb{R}$ vers D

$$\begin{cases} f(x;y)=(a;b) \\ \left]1;+\infty\right[\times\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(a;b)=(x;y) \\ y\in D \end{cases}$$

$f^{-1}(a;b)=\left(1+\sqrt{1+b-a};b-\left(1+\sqrt{1+b-a}\right)^2\right)$ Donc : $\begin{aligned} f^{-1}:\left]1;+\infty\right[\times\mathbb{R}&\to D \\ (x;y)&\mapsto\left(1+\sqrt{1+y-x};y-\left(1+\sqrt{1+y-x}\right)^2\right)\end{aligned}$

Exercice11 : Soit E un ensemble non vide et soient A ; B des parties de E tel que : $A\cup B=E$ et $A\cap B=\varnothing$

Soit l'application f : $\begin{aligned} P(E)&\to P(A)\times P(B) \\ X&\mapsto(A\cap X;B\cap X)\end{aligned}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Solution : 1) Soit $(X;Y)\in(P(E))^2$

Tel que : $f(X)=f(Y)$ Montrons que : $X=Y$

$f(X)=f(Y)\Rightarrow(A\cap X;B\cap X)=(A\cap Y;B\cap Y)$

$\Rightarrow\begin{cases}A\cap X=A\cap Y & ①\\ B\cap X=B\cap Y & ②\end{cases}\Rightarrow ①\cup② (A\cap X)\cup(B\cap X)=(A\cap Y)\cup(B\cap Y)$

$\Rightarrow X\cap(A\cup B)=Y\cap(A\cup B)\ \ \Rightarrow X\cap E=Y\cap E\Rightarrow X=Y$

Donc : f est injective

2) Soit $(Y;Z)\in P(A)\times P(B)$

$\exists ? X\in P(E)$ Tel que : $f(X)=(Y;Z)$

$f(X)=(Y;Z)\Rightarrow(A\cap X;B\cap X)=(Y;Z)$

$\Rightarrow\begin{cases}A\cap X=Y & ①\\ B\cap X=Z & ②\end{cases}\Rightarrow ①\cup② (A\cap X)\cup(B\cap X)=Y\cup Z\quad\Rightarrow X\cap(A\cup B)=Y\cup Z$

$\Rightarrow X\cap E=Y\cup Z\ \ \Rightarrow X=Y\cup Z$

On vérifie bien que : $X=Y\cup Z$ est solution de l'équation : $f(X)=(Y;Z)$

En effet : $Y\cup Z\in P(E)$ et $f(Y\cup Z)=(A\cap(Y\cup Z);B\cap(Y\cup Z))$

$=((A\cap Y)\cup(A\cap Z);(B\cap Y)\cup(B\cap Z))=(Y;Z)$ Or : $(Y;Z)\in P(A)\times P(B)$ et $A\cap B=\varnothing$

Donc : $Y\subset A\ et\ Z\subset B$ et $A\cap B=\varnothing$

Donc : $A\cap Y=Y$ et $A\cap Z=\varnothing$ et $b\cap Y=\varnothing$ et $B\cap Z=Z$

Donc : $f(Y\cup Z)=(Y\cup\varnothing;\varnothing\cup Z)=(Y;Z)$

Conclusion : f est surjective

3) Déterminons f^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$f(Y\cup Z)=(Y;Z)\Leftrightarrow Y\cup Z=f^{-1}(Y;Z)$ et : $f^{-1}:\begin{array}{l}P(A)\times P(B)\to P(E)\\ \quad (Y;Z)\quad\mapsto Y\cup Z\end{array}$

Exercice12: Soient E, F et G trois ensemble et soient : $f: E\to F$ et $g: F\to G$ deux applications.

1) Montrer que si f et g sont injectives alors $g\circ f$ est injective.

2) Montrer que si f et g sont surjectives alors $g\circ f$ est surjective.

3)Que peut-on conclure sur $g\circ f$ si f et g sont bijectives ?

4) Montrer que si $g\circ f$ est injective alors f est injective.

5) Montrer que si $g\circ f$ est surjective alors g est surjective. 6) Si à présent $f: E\to F$ et $g: F\to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

a) $g\circ f=Id_E$ b) $f\circ g=Id_F$ c) $f\circ f=Id_E$

7) Montrer que si $g\circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective

8) Montrer que si $g\circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective

Solution : 1) $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ Car g est injective

$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ car f est injective.

Donc $g\circ f$ est injective.

2)Première méthode : Pour tout $z\in G$ il existe $y\in F$ tel que $z=g(y)$ car g est surjective.

Comme pour tout $y\in F$ il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$ car f est surjective.

On en déduit que pour tout $z\in G$ il existe $x\in E$ tel que :

$z=g(f(x))=g\circ f(x)$ autrement dit $g\circ f$ est surjective.

<u>Remarque :</u> a) D'habitude on appelle y un élément de l'image G mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler x l'élément de F et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de E, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler z.

b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que :
$z = g(f(x)) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.
Deuxième méthode : On rappelle que $\varphi : U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$
Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$,
Par conséquent $g \circ f(E) = g(f(E)) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.
3)Si g et f sont bijectives alors elles sont injectives
et $g \circ f$ est injective et si g et f sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective
On en déduit que $g \circ f$ est bijective.
4) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ car $g \circ f$ est injective
Par conséquent f est injective.
5) *<u>Première méthode :</u>* Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que :$z = g \circ f(x) = g(f(x))$,
Donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$
Ce qui signifie que g est surjective.
<u>Deuxième méthode :</u> Comme $g \circ f$ est surjective,
$g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g(f(E)) = G$ or $f(E) \subset F$
Donc : $g(f(E)) \subset g(F)$
Comme $g(F) \subset G$, cela donne $G = g(f(E)) \subset g(F) \subset G$ D'où $g(f(E)) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$
Ce qui montre que g est surjective.
6) a) $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)
$g \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.
$g \circ f$ est surjective, d'après 5°), g est surjective.
<u>Remarque :</u> $g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que :$g = f^{-1}$ et que donc f et g sont bijectives.
b) $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)
$f \circ g$ est injective, d'après 4°), g est injective.
$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.
c) $f \circ f = Id_E$ est bijective $f \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective. $f \circ f$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.
Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = f$
7) Supposons que : $g \circ f$ est surjective et g est injective
Montrons que f est surjective
Soit : y ∈ F donc : g(y) ∈ G
Puisque : $g \circ f$ est surjective Il existe $x \in E$ tel que : $(g \circ f)(x)$ = g(y)
Donc : $g(f(x))$ = g(y) et Comme g est injective
Alors : il existe $x \in E$; tel que : y = $f(x)$
Donc : f est surjective
8) Supposons que : $g \circ f$ est injective et f est surjective Montrons que g est injective.
Soit : y ∈ F et y ' ∈ F tel que : g (y) = g (y ')
Puisque : f est surjective Il existe x ; x' ∈ E tel que : f(x) = y et f(x') = y '
Donc : g (f(x)) = g (f(x'))
Donc : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$
Puisque : $g \circ f$ est injective alors : $x = x'$
Donc : f(x) = f(x') c'est-à-dire :y = y'
Donc : g est injective.
Exercice13 : Soient E et F deux ensembles non vides et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E et Soient A' et B' deux parties de F
1) Montrer que : si A ⊂ B alors : $f(A) \subset f(B)$
2) Montrer que : si A' ⊂ B' alors : $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
Solution :1) Supposons que : A ⊂ B
Soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que : $y = f(x)$.

Et puisque : A $\subset B$ alors $x \in B$

Ceci signifie que : $y \in f(B)$

Conclusion : $f(A) \subset f(B)$

1) Supposons que : A' $\subset B'$

Soit x $\in f^{-1}(A')$, donc $f(x) \in A'$ et puisque : A' $\subset B'$ alors $f(x) \in$ B'

Ceci signifie que : x $\in f^{-1}$(B'),

Conclusion : $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

Exercice14 : Soient E et F deux ensembles non vides et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, Montrer que : 1) $f\ (A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) $f\ (A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte.

3)Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a : $f\ (A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Solution :1) a) Pour tout $y \in f\ (A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que : $y = f(x)$.

Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$,

Comme $x \in B$, $y = f(x) \in f(B)$

Par conséquent : $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$

Cela montre que $f\ (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

b) Pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$

Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$,

Mais $x \in A \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f\ (A \cup B)$

Si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$,

Mais $x \in B \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f\ (A \cup B)$

Cela montre que s tous les cas $y \in f\ (A \cup B)$ et que donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Finalement $f\ (A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) Pour tout $y \in f\ (A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que :$y = f(x)$.

Comme $x \in A \cap B \subset A$, $y = f(x) \in f(A)$, Comme $x \in A \cap B \subset B$, $y = f(x) \in f(B)$

Par conséquent $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

Cela montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Pour trouver un exemple où l'inclusion est stricte,

D'après la suite, il ne faut pas prendre une fonction injective, par exemple prenons :

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, ensuite il faut prendre/

A et B où f n'est pas injective, par exemple : $A = [-4,2]$ et $B = [-2,3]$

$f(A) = f([-4,2]) = [0,16]$; $f(B) = f([-2,3]) = [0,9]$

$\Rightarrow f(A) \cap f(B) = [0,9]$ $A \cap B = [-2,2] \Rightarrow f(A \cap B) = [0,4]$

On a bien $f\ (A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien