1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°5 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : On considère les ensembles suivants : $H=\left\{(n;m)\in\mathbb{Z}^2 / nm+2-3n=7\right\}$

$L=\left\{(n;m)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^* / \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{5}\right\}$

Écrire les ensembles H et L en extension

Exercice2 : Soit $E=\left\{m\in\mathbb{R} / \forall x\in\mathbb{R};\ (m+1)x^2+(m+3)x+m+1\succ 0\right\}$

Déterminer l'ensemble E

Exercice3 : Soient les ensembles : $A=\{1;2\}$ et $B=\{2;3;4\}$

1)Déterminer en extension : $A\cup B$; $A\cap B$; $A-B$; $B-A$; $A\Delta B$

2)Déterminer en extension : les produits cartésiens suivants :

$A\times B$; $B\times A$; A^2 et déterminer : $card(A\times B)$

3)Déterminer l'ensemble des parties de A^2 et se note $\mathcal{P}(A^2)$.

Exercice4 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E

Monter les assertions suivantes :

1) $A\subset B \Leftrightarrow A=A\cap B$

2) $A\cap B\subset\left(A\cap\overline{C}\right)\cup\left(B\cap C\right)$

Exercice5 : E est un ensemble.

1) Montrer que quelles que soient les parties : A et X de E : $(A\cap X)\cup\left(\overline{A}\cap X\right)=X$

2) En déduire dans E les solutions de l'équation : $A-X=X-A$

Exercice6 : Justifier les énoncés suivants.

a) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

b) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B .

c) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants :

$C_E^{C_E^A}$; $A\cap C_E^A$; $A\cup C_E^A$; $C_E^{\varnothing}$; C_E^E

Exercice7 : Soient A ; B ; C des ensembles

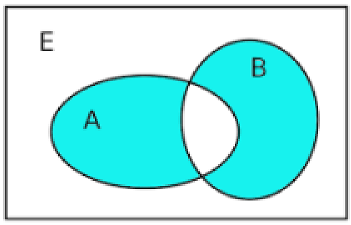
Monter que : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

Exercice8 : Soient A ; B des ensembles

Monter que : $A-B=A\Leftrightarrow B-A=B$

Exercice9 : Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. A et B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$A\Delta B==(A\cup B)\setminus(A\cap B)$



1) Montrer que : $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

2) Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3) Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
a) $\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$
b) $(A\Delta B)\,\Delta C = (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})\cup(C\cap B\cap A)$
c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
e) En déduire que : $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
4) Montrer que : $A\Delta B = A\cap B \Rightarrow A=B=\emptyset$

Exercice10 : Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{2n+1}{4}/\,n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{5m+4}{3}/\,m\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $A\cap B=\emptyset$
2) Montrer que : $B\cap\mathbb{N}\neq\emptyset$

Exercice11 : Soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :
$E=\{x\in\mathbb{Z}/|x+1|\leq 3\}$ et $F=\{x\in\mathbb{Z}/|2x-a|\leq 4\}$
1) Ecrire E en extension
2) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $E\cap F=\emptyset$
3) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N}\cap F=\emptyset$
4) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $F\subset\mathbb{N}$

Exercice12 : Soient les applications : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x-\frac{1}{x}\end{aligned}$ et $\begin{aligned} g:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^2-3x+2\end{aligned}$

1) a) Déterminer : $f(\{3\})$
b) Montrer que $f(]0;2])\subset\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$
2) Déterminer : $g(]2;3])$

Exercice13 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^2+1\end{aligned}$

Déterminer $f^{-1}([5;+\infty[)$

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{aligned} I &\to J\\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$

1) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2) Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3) Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective

Exercice15 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{2x}{1+|x|}\end{aligned}$

1) Montrer que f est injective
2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;|f(x)|\prec 2$
b) f est-elle surjective ?
3) Déterminer un intervalle $J\subset\mathbb{R}$ tel que f soit bijective et déterminer sa bijection réciproque

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}^+ &\to]-\infty;3]\\ x &\mapsto 3-x^2\end{aligned}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty;3]$.

Exercice17 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2-5x \end{aligned}$

f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. ?

Exercice18 : Soit l'application f : $\begin{aligned} &:\mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}-\{1\} \\ &x \mapsto f(x)=\frac{x+1}{x-2} \end{aligned}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice19 : Soit l'application f : $\begin{aligned} &:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto x^2+1 \end{aligned}$ et Considérons les ensembles : $A=[-3;2]$ et $B=[0;4]$

1) Comparer les ensembles : $f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$

2)Quelle condition doit vérifier f pour que : $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Exercice20 : Soit l'application f : $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) &\mapsto (x-y\ ;\ x+2y) \end{aligned}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Exercice21 : Soit l'application f : $\begin{aligned} \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (n;m) &\mapsto (n-m)^2 \end{aligned}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien