1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°5 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : On considère les ensembles suivants : $H=\{(n;m)\in\mathbb{Z}^2 / nm+2-3n=7\}$

$L=\left\{(n;m)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^* / \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{5}\right\}$

Écrire les ensembles H et L en extension

Solution :1) Soit : $(n;m)\in\mathbb{Z}^2$

$(n;m)\in H \Leftrightarrow nm+2-3n=7 \Leftrightarrow n(m-3)=5 \Leftrightarrow \begin{cases} n=5 \\ m-3=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-5 \\ m-3=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=1 \\ m-3=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-1 \\ m-3=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n=5 \\ m=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-5 \\ m=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=1 \\ m=8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-1 \\ m=-2 \end{cases}$

Donc : $H=\{(4;5);(2;-5);(8;1);(-2;-1)\}$

1) Soit : $(n;m)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$

$(n;m)\in L \Leftrightarrow \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{n+m}{nm}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5n+5m=nm \Leftrightarrow 5n+5m-nm=0 \Leftrightarrow m(5-n)+5n=0$

$\Leftrightarrow -m(n-5)+5(n-5)+25=0 \Leftrightarrow m(n-5)-5(n-5)=25$

$\Leftrightarrow (n-5)(m-5)=25 \Leftrightarrow \begin{cases} n-5=5 \\ m-5=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=1 \\ m-5=25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=-1 \\ m-5=-25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=-25 \\ m-5=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=25 \\ m-5=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-5=-5 \\ m-5=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n=10 \\ m=10 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=6 \\ m=30 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=4 \\ m=-20 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=-20 \\ m=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=30 \\ m=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=0 \\ m=0 \end{cases}$ $(n;m)\notin\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$

Donc : $L=\{(10;10);(6;30);(30;6);(4;-20);(4;-20)\}$

Exercice2: Soit $E=\{m\in\mathbb{R} / \forall x\in\mathbb{R};\ (m+1)x^2+(m+3)x+m+1\succ 0\}$

Déterminer l'ensemble E

Solution : Soit $m\in\mathbb{R}$

On a : $m+1\succ 0$

$m\in E \Leftrightarrow \ \Delta\prec 0 \ \Leftrightarrow m+1\succ 0$ et $(m+3)^2-4(m+1)^2\prec 0$

$\Leftrightarrow \ m+1\succ 0$ et $-3m^2-2m+5\prec 0$

$\Delta=36$; $m_1=-\frac{5}{3}$ et $m_2=1$

$-3m^2-2m+5\prec 0 \ \Leftrightarrow m\in \left]-\infty;\frac{-5}{3}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$m\in E \Leftrightarrow m\succ -1$ et $m\in \left]-\infty;\frac{-5}{3}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$m\in E \Leftrightarrow m\succ -1$ et $m\in \left]1;+\infty\right[$

Donc : $E=\left]1;+\infty\right[$

Exercice3 : Soient les ensembles : $A=\{1;2\}$ et $B=\{2;3;4\}$

1)Déterminer en extension : $A\cup B$; $A\cap B$; $A-B$; $B-A$; $A\Delta B$

2)Déterminer en extension : les produits cartésiens suivants :
$A\times B$; $B\times A$ et A^2 et déterminer : $card\left(A\times B\right)$

3)Déterminer l'ensemble des parties de A^2 et se note $\mathcal{P}(A^2)$.

Solution :1) $A\cup B=\{1;2;3;4\}$; $A\cap B=\{2\}$: $A-B=\{1\}$; $B-A=\{3;4\}$

$A\Delta B=\left(A-B\right)\cup\left(A-B\right)=\{1;3;4\}$

2) $A\times B=\{(1;2);(1;3);(1;4);(2;2);(2;3);(2;4)\}$

$B\times A=\{(2;1).(2;2);(3;1);(3;2);(4;1);(4;2);\}$ Remarque : $A\times B\neq B\times A$

$A^2=A\times A=\{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$

$card\left(A\times B\right)=6=card\left(A\right)\times card\left(B\right)$ et $card\left(A^2\right)=card\left(A\right)\times card\left(A\right)=4$

3) On a : $A^2=A\times A=\{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$

$P(A^2)=\{\varnothing;\{(1;1)\};\{(1;2)\};\{(2;1)\};\{(2;2)\};\{(1;1);(1;2)\};\{(1;1);(2;1)\};\{(1;1);(2;2)\};\{(1;2);(2;1)\};\{(1;2);(2;2)\};\{(2;1);(2;2)\};$

$\{(1;1);(1;2);(2;1)\}$;$\{(1;1);(1;2);(2;2)\}$;$\{(1;2);(2;1);(2;2)\}$;$\{(1;1);(2;1);(2;2)\};A^2\}$

$card\left(P(A^2)\right)=2^{cardP(A^2)}=2^4=16$

Exercice4 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E
Monter les assertions suivantes :
1) $A\subset B\Leftrightarrow A=A\cap B$
2) $A\cap B\subset\left(A\cap\overline{C}\right)\cup\left(B\cap C\right)$

Solution : 1) Montrons que : $A\subset B\Leftrightarrow A=A\cap B$
Cette proposition est une équivalence.
On raisonne donc par double implication.
• ⇒ : cette implication est immédiate (faites un dessin !).
• ⇐ : Soit x ∈ A. Puisque A = A ∩ B,
Donc : x ∈ A ∩ B.
Ainsi x ∈ A et x ∈ B.
En particulier, x ∈ B.
On a donc montré que, pour tout élément x de A, x ∈ B : ainsi, A ⊂ B.
Par double implication, on a bien l'équivalence demandée. 2) Il faut montrer ici une inclusion entre ensembles.
Le point de départ est habituel :Soit x ∈ A∩B donc : x ∈ A et x ∈ B.
On a alors une disjonction de cas :
• 1 er cas : x ∈ C .
On a x ∈ B et x ∈ C , donc x ∈ B ∩C .
Ainsi, x ∈ (A ∩$\overline{C}$)∪(B ∩C).
• 2ème cas : x $\notin C$. Alors x ∈ $\overline{C}$. Puisque x est aussi élément de A, x ∈ A ∩$\overline{C}$. Ainsi, x ∈ (A ∩$\overline{C}$)∪(B ∩C). Finalement, dans tous les cas :
si x ∈ A ∩ B alors : x ∈ (A ∩$\overline{C}$)∪(B ∩C).
On a donc bien l'inclusion demandée.

Exercice5 : E est un ensemble.
1) Montrer que quelles que soient les parties : A et X de E : $\left(A\cap X\right)\cup\left(\overline{A}\cap X\right)=X$

2) En déduire dans E les solutions de l'équation : $A-X=X-A$

Solution : 1)$\left(A\cap X\right)\cup\left(\overline{A}\cap X\right)=\left(\overline{A}\cup A\right)\cap X=E\cap X=X$

2) $A-X=X-A\Leftrightarrow A\cap\overline{X}=X\cap\overline{A}$

$\Rightarrow\left(A\cap\overline{X}\right)\cup\left(A\cap X\right)=\left(X\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap X\right)\Rightarrow A=X$

Inversement si $X=A$ alors : X solution de l'équation : $A-X=X-A$ car : $A-A=A-A$

Exercice6 : Justifier les énoncés suivants.

a) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

b) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.

c) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants :

$C_E^{C_E^A}$; $A\cap C_E^A$; $A\cup C_E^A$; $C_E^{\varnothing}$; C_E^E

Solution :

a) Montrons que : $A\subset B\Rightarrow C_E^B\subset C_E^A$

a) Soit $x\in C_E^B=\overline{B}$ alors $x\notin B$, comme $A\subset B$

Alors $x\notin A$, autrement dit $x\in C_E^A=\overline{A}$ ce qui montre que si $x\in\overline{B}$ alors $x\in\overline{A}$

Donc : $A\subset B\Rightarrow C_E^B\subset C_E^A$

b) Si $x\in A$ alors $x\notin B$ (car $A\cap B=\emptyset$) donc $x\in\overline{B}$

Si $x\notin A$ alors $x\in\overline{A}$

Alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.

c)

• $x\in C_E^{C_E^A}\Leftrightarrow x\notin C_E^A\Leftrightarrow x\in A$

Donc : $C_E^{C_E^A}=A$

• $x\in A\cap C_E^A\Leftrightarrow x\in A\ et\ x\in C_E^A\Leftrightarrow x\in A\ et\ x\notin A$

$x\in A\cap C_E^A\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Donc : $A\cap C_E^A=\varnothing$

• $x\in A\bigcup C_E^A\Leftrightarrow x\in A\ ou\ x\in C_E^A\Leftrightarrow x\in E$

$x\in A\cup C_E^A\Leftrightarrow x\in E$

Donc : $A\cup C_E^A=E$

• $x\in C_E^{\varnothing}\Leftrightarrow x\in E\ et\ x\notin\varnothing\Leftrightarrow x\in E$

$x\in C_E^{\varnothing}\Leftrightarrow x\in E$

Donc : $C_E^{\varnothing}=E$

• $x\in C_E^E\Leftrightarrow x\in E\ et\ x\notin E\Leftrightarrow x\in\varnothing$

$x\in C_E^E\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Donc : $C_E^E=\varnothing$

Exercice7 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

Solution : On suppose que : $A\subset B\subset C$

On a : $A\subset B\subset C\Rightarrow A\subset B$ et $B\subset C$

$\Rightarrow A\cup B=B$ et $B\cap C=B\Rightarrow A\cup B=B\cap C$

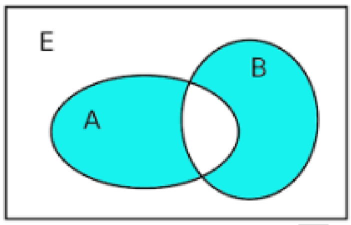
On suppose que : $A\cup B=B\cap C$

On a : $A\cup B=B\cap C\Rightarrow A\cup B\subset B$ et $A\cup B\subset C$
$\Rightarrow A\subset B$ et $B\subset C\Rightarrow A\subset B\subset C$
Donc : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

Exercice8 : Soient A ; B des ensembles
Monter que : $A-B=A\Leftrightarrow B-A=B$

Solution : On suppose que : $A-B=A$
Montrons que : $B-A=B$
Donc : Montrons que : $B-A\subset B$ et $B\subset B-A$
C'est-à-dire : montrons que : $B-A\subset B$?
Soit : $x\in B-A$ donc : $x\in B$ *et* $x\notin A$
Donc : $x\in B$
D'où : $B-A\subset B$
Montrons que : $B\subset B-A$?
Soit : $x\in B$
Supp : $x\in A$ alors : $x\in A-B$
Mais : $A-B=A$ donc : $x\notin A$ absurde
Donc : $x\in B$ et $x\notin A$
Donc : $x\in B-A$
D'où : $B\subset B-A$
Par suite : $A-B=A\Rightarrow B-A=B$
Inversement : de la même façon on montre que : $B-A=B\Rightarrow A-B=A$ car A *et* B jouent des rôles symétriques.

Exercice9 : Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. A et B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :
$A\Delta B==(A\cup B)\setminus(A\cap B)$



1) Montrer que :$A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
2) Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3) Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
a) $\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$
b) $(A\Delta B)\,\Delta C = (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})\cup(C\cap B\cap A)$
c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
e) En déduire que : $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
4) Montrer que : $A\Delta B=A\cap B\Rightarrow A=B=\emptyset$

Solution :1)$(A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) = (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$
$= (A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B}) = \emptyset\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup\emptyset = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$
$= (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$
2) $A\Delta A = (A\cup A)\setminus(A\cap A) = A\setminus A = \emptyset$
$A\Delta\emptyset = (A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset) = A\setminus\emptyset = A$ et $A\Delta E = (A\cup E)\setminus(A\cap E) = E\setminus A = \overline{A}$
3) a) $\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}=\overline{A\cap\overline{B}}\cap\overline{B\cap\overline{A}} = (\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup A)$
$= (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap A)\cup(B\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$
$= (\overline{A}\cap\overline{B})\cup\emptyset\cup\emptyset\cup(B\cap A) = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$

b) $(A\Delta B)\,\Delta C = ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}))\,\Delta C$

$= (((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}$

$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A))) = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
$) \cup (C \cap B \cap A)$

c) $(A\Delta B)\,\Delta C = (C \cap \overline{A\Delta B}) \cup ((A\Delta B) \cap \overline{C}) = ((A\Delta B) \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A\Delta B}) = C\Delta(A\Delta B)$

Or $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = B\Delta A$ donc : $(A\Delta B)\,\Delta C = C\Delta(A\Delta B) = C\Delta(B\Delta A)$

d) $(C\Delta B)\Delta A = (C \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap C) = A\Delta(B\Delta C)$,
en changeant A et C.

e) $(A\Delta B)\,\Delta C = C\Delta(B\Delta A)$ d'après d)
Or $C\Delta(B\Delta A) = A\Delta(B\Delta C)$ d'après c).
Donc $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

4) Montrons que : $A\Delta B = A\cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$

$\Leftarrow)$) On suppose que : $A = B = \varnothing$

$A\Delta B = \varnothing\Delta\varnothing = \varnothing$ et $A\cap B = \varnothing\cap\varnothing = \varnothing$

Donc : $A\Delta B = A\cap B$

Donc : $A = B = \varnothing \Rightarrow A\Delta B = A\cap B$

$\Rightarrow)$ On suppose que : $A\Delta B = A\cap B$

Montrons que : $A = B = \varnothing$

On suppose que : $A \neq \varnothing$ par exemple

Donc : $\exists x \in A$

Si : $x \in B$ Alors : $x \in A\cap B$

Donc : $x \in A\Delta B$ absurde

Si : $x \notin B$ Alors : $x \in A\Delta B$

Donc : $x \in A\cap B$ absurde

Donc : $A = \varnothing$ (de même on montre que : $B = \varnothing$)

Conclusion : $A\Delta B = A\cap B \Rightarrow A = B = \varnothing$

Exercice10 : Soient les ensembles suivants : $A = \left\{\frac{2n+1}{4} / n \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{\frac{5m+4}{3} / m \in \mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $A\cap B = \varnothing$

2) Montrer que : $B\cap\mathbb{N} \neq \varnothing$

Solution : 1) On suppose par l'absurde que : $A\cap B \neq \varnothing$ Alors il existe : $x \in A\cap B$ tel que :

$\exists (n;m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que : $x = \frac{2n+1}{4} = \frac{5m+4}{3}$

Donc : $\frac{2n+1}{4} = \frac{5m+4}{3}$

Donc : $6n+3 = 20m+16 \Rightarrow 6n-20m = 13 \Rightarrow 3n-10m = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}$

Ce qui est absurde car : $3n-10m \in \mathbb{Z}$

Donc : $A\cap B = \varnothing$

2) On a : $3 \in B$ en effet : $\frac{5m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow 5m+4 = 9 \Leftrightarrow 5m = 5 \Leftrightarrow m = 1 \in \mathbb{Z}$

Donc : $3 = \frac{5\times1+4}{3}$ $\quad et \quad 1 \in \mathbb{Z}$

On a donc : $3 \in \mathbb{N}$ et $3 \in B$ c'est-à-dire : $3 \in B\cap\mathbb{N}$

Donc $B\cap\mathbb{N} \neq \varnothing$

Exercice11 : Soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$E = \{x \in \mathbb{Z} / |x+1| \leq 3\}$ et $F = \{x \in \mathbb{Z} / |2x-a| \leq 4\}$

1) Ecrire E en extension

2) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $E \cap F = \varnothing$
3) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N} \cap F = \varnothing$
4) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $F \subset \mathbb{N}$

Solution : 1) il est aisé de voir que : $E = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$

2) $F = \{x \in \mathbb{Z} / -4 \leq 2x - a \leq 4\} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \leq a \leq 2x + 4\}$

Donc : $C_{\mathbb{Z}}^{F} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \succ a.ou.a \succ 2x + 4\}$

$E \cap F = \varnothing \Leftrightarrow E \subset C_{\mathbb{Z}}^{F} \Leftrightarrow \forall x \in E; x \in C_{\mathbb{Z}}^{F}$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; 2x - 4 \succ a \;\; ou \;\; a \succ 2x + 4$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; a \in \left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4; +\infty\right[\Leftrightarrow a \in \bigcap_{x \in E} \left(\left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4; +\infty\right[\right)$

Puisque : $E = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$ on obtient : $E \cap F = \varnothing \Leftrightarrow a \in \left(\left]-\infty; 2(-4)-4\right[\cup \left]2 \times 2 + 4; +\infty\right[\right)$

$\Leftrightarrow a \in \left(\left]-\infty; -12\right[\cup \left]8; +\infty\right[\right)$

3)on a : $\overline{F} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \succ a.ou.a \succ 2x + 4\}$

Donc nous pouvons écrire : $\mathbb{N} \cap F = \varnothing \Leftrightarrow \mathbb{N} \subset \overline{F} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}; x \in \overline{F}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}; a \in \left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4; +\infty\right[$

$\Leftrightarrow a \in \bigcap_{x \in \mathbb{N}} \left(\left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4; +\infty\right[\right) \Leftrightarrow a \in \left]-\infty; -4\right[$

3)On a : $F = \left\{x \in \mathbb{Z} / -2 + \frac{a}{2} \leq x \leq 2 + \frac{a}{2}\right\}$

Donc : $F \subset \mathbb{N} \Leftrightarrow F = \left(\forall x \in \left\{x \in \mathbb{Z} / -2 + \frac{a}{2} \leq x \leq 2 + \frac{a}{2}\right\}\right); x \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow -1 \prec -2 + \frac{a}{2} \Leftrightarrow -2 \prec -4 + a \Leftrightarrow 2 \prec a$

Exercice12 : Soient les applications : $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \frac{1}{x} \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$

1) a) Déterminer : $f(\{3\})$

b) Montrer que $f(]0;2]) \subset \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

2) Déterminer : $g(]2;3])$

Solution : 1) a) $f(\{3\}) = \{f(3)\}$

On a : $f(3) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ donc : $f(\{3\}) = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

b) $f(]0;2])$?

$x \in]0;2] \Leftrightarrow 0 \prec x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -x \prec 0 \;\; \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}$

$x \in]0;2] \Rightarrow x - \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2} + 2 \Rightarrow x - \frac{1}{x} \leq \frac{3}{2} \;\; \Rightarrow f(x) \leq \frac{3}{2}$

Donc : $x \in]0;2] \Rightarrow f(x) \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Donc : $f(]0;2]) \subset \left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) Déterminons : $g(]2;3])$.

$$g(x) = x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2$$

$$g(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$x \in]2;3] \Leftrightarrow 2 \prec x \leq 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2} \leq x - \frac{3}{2} \prec 3 - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x - \frac{3}{2} \prec \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \prec \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \prec \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \prec 2$$

$$x \in]2;3] \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \prec 2 \Leftrightarrow g(x) \in [0;2[$$

Donc : $g(]2;3]) = [0;2[$

Exercice13 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}$

Déterminer $f^{-1}([5;+\infty[)$

Solution : Soit : $x \in \mathbb{R}$

$$x \in f^{-1}([5;+\infty[) \Leftrightarrow f(x) \in [5;+\infty[\Leftrightarrow 5 \leq f(x)$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$x \in f^{-1}([5;+\infty[) \Leftrightarrow x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$$

D'où : $f^{-1}([5;+\infty[) =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

Exercice14 : Soit l'application $f : \begin{array}{l} I \to J \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

1) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2) Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3) Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4) Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective

Solution : 1) $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.
2) $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.
3) $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.
4) $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

Exercice15: Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x}{1+|x|} \end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; |f(x)| \prec 2$
b) f est-elle surjective ?
3) Déterminer un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ tel que f soit bijective et déterminer sa bijection réciproque

Solution :1) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2x_1}{1+|x_1|}=\frac{2x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow \left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right|=\left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{|x_1|}{1+|x_1|}=\frac{|x_2|}{1+|x_2|}\Rightarrow |x_1|(1+|x_2|)=|x_2|(1+|x_1|)$$

$$\Rightarrow |x_1||x_2|+|x_1|=|x_1||x_2|+|x_2|\Rightarrow |x_1|=|x_2|$$

On remplace dans : $\frac{2x_1}{1+|x_1|}=\frac{2x_2}{1+|x_2|}$

$$\Rightarrow \frac{2x_1}{1+|x_1|}=\frac{2x_2}{1+|x_1|}\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Donc f est injective

2) a) $f(x)=\frac{2x}{1+|x|}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: on a : $x\le |x| \prec |x|+1$

Donc : $2x\le 2|x| \prec 2(|x|+1)$

Donc : $\frac{2x}{1+|x|}\prec \frac{2(1+|x|)}{1+|x|}$

Donc : $\frac{2x}{1+|x|}\prec 2$ c'est-à-dire : $f(x)\prec 2$:

b) Par exemple : 2 n'admet pas d'antécédents
Donc f n'est pas surjective
3) à revoir

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+\to]-\infty;3] \\ x\mapsto 3-x^2 \end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$vers $]-\infty;3]$.

Solution : Soient $y\in]-\infty;3]$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$$f(x)=y \Leftrightarrow 3-x^2=y\Leftrightarrow x^2=3-y$$

Or $y\in]-\infty;3]$ donc $y\le 3$ c'est-à-dire : $0\le 3-y$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3-y}$ Car $x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall \boldsymbol{y} \in]-\infty;3])(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Donc : f est surjective

Exercice17 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2-5x \end{array}$

f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. ?

Solution : Soient $y\in\mathbb{R}$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$$f(x)=y\Leftrightarrow 2-5x=y\Leftrightarrow x=\frac{2-y}{5}$$

Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ $(\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R})$
Donc : f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice18 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\} \\ x\mapsto f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}\end{array}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y\in\mathbb{R}-\{1\}$

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{2\}$ l'équation $f(x)=y$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x-2}=y\Leftrightarrow x+1=y(x-2)$

$x-2\neq0$ car $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$f(x)=y\Leftrightarrow x+1=yx-2y\Leftrightarrow x-yx=-2y-1$

$\Leftrightarrow x(1-y)=-2y-1\Leftrightarrow \boxed{x=\dfrac{-2y-1}{1-y}}$ car $y-1\neq0$

Et on a : $x=\dfrac{-2y-1}{1-y}\neq2$

En effet : si $\dfrac{-2y-1}{1-y}=2\Rightarrow-2y-1=2-2y$

$\Rightarrow-1=2$ (Absurde)

Donc : $\forall y\in\mathbb{R}-\{1\}\ \exists!x\in\mathbb{R}-\{2\}$ tel que : $f(x)=y$

Donc : f est bijective.

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in\mathbb{R}-\{2\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=f^{-1}(y)=\dfrac{-2y-1}{1-y} \\ y\in\mathbb{R}-\{1\}\end{cases}$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-1}{1-x}=\dfrac{2x+1}{x-1}$

$f^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}$

$x\mapsto f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

Exercice19: Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+1\end{array}$ et Considérons les ensembles : $A=[-3;2]$ et $B=[0;4]$

1) Comparer les ensembles :

$f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$

2)Quelle condition doit vérifier f pour que : $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Solution : 1) On a d'un côté :

$A\cap B=[-3;2]\cap[0;4]=[0;2]$

Alors : $f(A\cap B)=f([0;2])$

$=\{f(x)/0\leq x\leq2\}=[1;5]$

D'un autre côté, on a : $A=[-3;2]=[-3;0]\cup[0;2]$

$f(A)=f([-3;2])=f([-3;0]\cup[0;2])$

Alors : $f(A)=[1;10]\cup[1;5]=[1;10]$

Et $f(B)=[0;4]=[1;17]$

Il est clair que : $f(A)\cap f(B)=[1;10]\cap[1;17]=[1;10]$

Donc : $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

A quelle condition on a : $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$?

$y\in f(A)\cap f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\ et\ y\in f(B)$

$\Rightarrow \exists x\in A / y=f(x)\ et\ \exists x'\in B / y=f(x')$

Si : f est injective, alors $x=x'$ et par suite on a :

$\Rightarrow \exists x\in A / y=f(x)\ et\ \exists x\in B / y=f(x)$

$\Rightarrow \exists x\in A\cap B / y=f(x)$

$\Rightarrow y\in f(A\cap B)$

Conclusion : Si f est injective alors : $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Exercice20 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\(x;y)\mapsto(x-y\ ;x+2y)\end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Solution : 1) Soit : $(x;y)\ ;(x';y')\in\mathbb{R}^2$

Tel que : $f(x;y)=f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y)=(x';y')$??

$f(x;y)=f(x';y')\Leftrightarrow(x-y\ ;x+2y)=(x'-y'\ ;x'+2y')$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=x'-y'\\x+2y=x'+2y'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-x'=y-y' & (1)\\x-x'=2y'-2y & (2)\end{cases}$

$(1)+(2)\ \Rightarrow y-y'=2y'-2y\Rightarrow 3y=3y'\Rightarrow y=y'$

$x-x'=y-y'\ (1)\ \Rightarrow x-x'=0\Rightarrow x=x'$

$\Rightarrow x=x'\ et\ y=y'\ \Rightarrow(x;y)=(x';y')$

Donc : f est injective

2) Soit : $(z;t)\in\mathbb{R}^2$; $\exists?(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $f(x;y)=(z;t)$??

$f(x;y)=(z;t)\Leftrightarrow(x-y\ ;x+2y)=(z;t)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=z\\x+2y=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y=2z\\x+2y=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2z+t\\x-y=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2z+t}{3}\\y=x-z=\dfrac{2z+t}{3}-z\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2z+t}{3}\in\mathbb{R}\\y=\dfrac{t-z}{3}\in\mathbb{R}\end{cases}$ Donc : f surjective

3) Déterminons f^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$$f(x;y)=(z;t)\Leftrightarrow(x;y)=f^{-1}(z;t)=\left(\frac{2z+t}{3};\frac{t-z}{3}\right)$$

Donc : f^{-1} : $\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\(x;y)\mapsto\left(\frac{2x+y}{3};\frac{y-x}{3}\right)\end{array}$

Exercice21 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\(n;m)\mapsto(n-m)^2\end{array}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?

Solution : *Conseils méthodologiques (Pour montrer qu'une application est (ou n'est pas) injective/surjective)*

Soit f ∈ F(E ,F) :

- *Pour montrer que f est injective : on prend x et x_0,*

deux éléments de E tels que f (x) = f (x_0), et on montre que x = x_0 (ainsi y = f (x) ne peut avoir plus d'un antécédent);

- *Pour montrer que f n'est pas injective :*

On trouve x et x_0, éléments de E distincts et possédant la même image par f ;

- *Pour montrer que f n'est pas surjective :*

On trouve y ∈ F n'ayant aucun antécédent dans E par f

- *Pour montrer que f est surjective :*

On prend y ∈ F quelconque, et on détermine un antécédent de y dans E par f .

1)

- f est injective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au plus un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  C'est-à-dire : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\forall(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  $f(n;m)=f(n';m')\Rightarrow(n;m)=(n';m')$

- f n'est pas injective si et seulement s'il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui admet plus d'un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m)=f(n';m')$ *et* $(n;m)\neq(n';m')$

Si je trouve : $(n;m)\neq(n';m')$ et $f(n;m)=f(n';m')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Si je prends : $(1;2)$ *et* $(1;0)$

On a : $f(1;2)=(1-2)^2=1$ et $f(1;0)=(1-0)^2=1$

Donc : : $\exists(1;2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(1;0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(1;2)=f(1;0)$ Mais $(1;2)\neq(1;0)$

Donc : f n'est pas injective

2)

- f est surjective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  C'est-à-dire : $\forall p\in\mathbb{N}$; $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  Tel que : $f(n;m)=p$

- f n'est pas surjective si et seulement si il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists p\in\mathbb{N}$; $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $f(n;m)\neq p$

- Si je trouve : $p \in \mathbb{N}$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on peut affirmer que f n'est pas surjective.

Si je prends : $p = 3$

On a : $f(n;m)=3 \Leftrightarrow (n-m)^2 = 3 \Leftrightarrow n-m=\sqrt{3}$

Mais :il n'existe pas : $(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $n-m=\sqrt{3}$

Donc : $\exists 3 \in \mathbb{N}$; $\forall (n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $f(n;m)\neq 3$

Donc : f n'est pas surjective.

Remarque : il existe des éléments de $\mathbb{N}$ qui ont des antécédents dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Par exemple : $p=4$

$f(n;m)=4 \Leftrightarrow (n-m)^2=4 \Leftrightarrow n-m=2 \, ou \; n-m=-2$

Il existe : $(3;1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $(3-1)^2=4$

C'est-à-dire : $4\in\mathbb{N}$ a au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$(pas suffisant pour affirmer que f est surjective car il faut que tous les éléments de l'ensemble d'arrivé aient des antécédents par f .

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien