1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°4 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Ecrire en extension les ensembles suivants : $E_1=\{k\in\mathbb{Z}/|k+1|\leq 2\}$

$E_2=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-y^2=15\}$

$E_3=\{x\in\mathbb{Z}/(\forall n\in\mathbb{N})x^2\leq 4+n^3\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/0\prec 2x\leq y\leq 5\}$

$E_5=\left\{x\in\mathbb{Q}/x=\frac{p}{q}\,et\,p;q\in\mathbb{N}^*\right.$ Vérifiant $\left.p\leq 3q\leq 11\right\}$

Exercice2 $A=[0;1[$: et $B=\left\{\frac{x}{x+1}/x\in\mathbb{R}^+\right\}$

Montrons que : $A=B$

Exercice3 : Soient les ensembles : $A=[1,3]$ et $B=[2,4]$

Décrire les ensembles : $A\cap B$; $A\cup B$ et $A-B$

Exercice4 : Soient les ensembles : $A=]-\infty,3]$; $B=]-2,7]$ et $C=]-5,+\infty[$ Trois parties de $\mathbb{R}$.

Déterminer $A\cap B$, $A\cup B$, $B\cap C$, $B\cup C$, $\mathbb{R}-A$; $A-B$. $(\mathbb{R}-A)\cap(\mathbb{R}-B)$; $\mathbb{R}-(A\cup B)$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cap(B\cup C)$

Exercice5 : A ; B sont des parties d'un ensemble E

1)Montrer que : $A\subset B\Leftrightarrow \overline{A}\cup B=E$

2)Montrer que : $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}$

Exercice6 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble non vide E

Monter que : $\begin{cases}\left(\overline{B-C}\right)\cup A=E\\ \left(\overline{C-D}\right)\cup A=E\end{cases}\Rightarrow(B-D)\subset A$

Exercice7 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble

Qu'on note : $A\Delta B$ tel que : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

1)Monter que : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

2) Calculer $A\Delta B$ pour : A = {0, 1, 2, 3} et B = {2, 3, 4}.

3)Monter que : $A\Delta B=(A-(A\cap B))\cup(B-(A\cap B))$

4) Supposons que : $A\Delta B=A\cap B$

Monter que : $A=B=\varnothing$

5) Monter que : $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$

6) Monter que : $\forall C\in P(E)$: $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

7) Résoudre l'équation d'inconnue : $X\in P(E)$; $A\Delta X=\varnothing$

Exercice8 : Soient les ensembles : $E=\{a;b;c;d\}$ et $F=\{1;2\}$

1)Déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

2)Déterminer en extension : les produits cartésiens suivants :

$E\times F$ et F^2 et déterminer : $card(E\times F)$

Exercice9 : Soit l'ensemble : $F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\leq y \ et \ \ y^2\leq x \ \}$

1) Vérifier que : $F\neq\varnothing$

2) Montrer que : $F\subset[0;1]\times[0;1]$

Exercice10 : Soient E et F deux ensembles.

1) Montrons que : $\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)\subseteq\mathcal{P}(E\cup F)$.

2) Montrons que : $\mathcal{P}(E\cap F)=\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.

Exercice11 : Soient les ensembles : $H=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$

$G=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $H=]0;1]$

a) Considérer un élément $y_0\in H$ et montrer que : $y_0\in]0;1]$

b) Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrer que : $y_0\in H$.

2)Monter que $G\subset H$

3) Est-ce que $G=H$?

Exercice12 : Soit l'application $f: \ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Telle que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

1) Montrer que : $f(0)=0$

2) Montrer que : $f(1)=0$ ou $f(1)=1$

3) On suppose que : $f(1)\neq0$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $f(n)=n$

b) Montrer que : $\forall m\in\mathbb{Z}$; $f(m)=m$

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$

d) Montrer que : $\forall r\in\mathbb{Q}$; $f(r)=r$

Exercice13 : Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

1) $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 2) $g: \begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 3) $h: \begin{array}{l}[0;1]\to[0;2]\\ x\mapsto x^2\end{array}$

Exercice14 : Soit l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{x}{1+|x|}\end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) f est-elle surjective ?

Exercice15 :1) Soit l'application f : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$

a) f est-elle injective ? b) f est-elle surjective ?

2) Soit l'application g : $\begin{array}{l}g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$

a) g est-elle surjective ? b) g est-elle injective ?

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{aligned} f :]1;+\infty[&\to]0;+\infty[\\ x &\mapsto \frac{2}{x-1} \end{aligned}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice17 : Soit la fonction φ définie par : $\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si\ \ x\ est\ \ pair \\ -\dfrac{x+1}{2} & si\ \ x\ est\ \ impair \end{cases} \end{aligned}$

Montrer que φ est une bijection

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien