1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°4 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Ecrire en extension les ensembles suivants : $E_1=\{k\in\mathbb{Z}/|k+1|\le 2\}$

$E_2=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-y^2=15\}$

$E_3=\{x\in\mathbb{Z}/(\forall n\in\mathbb{N})x^2\le 4+n^3\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/0\prec 2x\le y\le 5\}$

$E_5=\left\{x\in\mathbb{Q}/x=\frac{p}{q} et p;q\in\mathbb{N}^*\right.$ Vérifiant $\left.p\le 3q\le 11\right\}$

Solution : $k\in E_1\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $|k+1|\le 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-2\le k+1\le 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-3\le k\le 1\Leftrightarrow k\in\{-3;-2;-1;0;1\}$

Donc : $E_1=\{-3;-2;-1;0;1\}$

$E_2=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-y^2=15\}$?

$x^2-y^2=15\Leftrightarrow(x+y)(x-y)=15$

on a : les diviseurs de 15 sont 1 ;3 ;5 ;15 et $x+y\ge x-y$

On dresse un tableau :

$x-y$	1	3
$x+y$	15	5
x	8	4
y	7	1

$E_2=\{(8;7);(4;1)\}$

$E_3=\{x\in\mathbb{Z}/(\forall n\in\mathbb{N})x^2\le 4+n^3\}$?

Soit : $x\in E_8$ donc : $x\in\mathbb{Z}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})x^2\le 4+n^3$ donc : on particulier pour $n=0$ on a $x^2\le 4$ donc $|x|\le 2$

D'où $x\in\{-2;-1;0;1;2\}$

Donc : $E_3\subset\{-2;-1;0;1;2\}$

Inversement $-2;-1;0;1;2$ Appartiennent à E_3

Donc : $\{-2;-1;0;1;2\}\subset E_3$

Conclusion : $E_3=\{-2;-1;0;1;2\}$.

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/0\prec 2x\le y\le 5\}$

$E_4=\{(1;2);(1;3);(1;4);(2;4);(2;5)\}$

$E_5=\left\{x\in\mathbb{Q}/x=\frac{p}{q} et p;q\in\mathbb{N}^*\right.$ Vérifiant $\left.p\le 3q\le 11\right\}$?

Soit : $x \in E_5$ donc $x=\frac{p}{q}$ avec $p;q \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq 3q \leq 11$ donc

$$\begin{cases} 3q \leq 11 \\ p \leq 3q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \leq 11/3 \\ p \leq 3q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \in \{1;2;3\} \\ p \leq 3q \end{cases}$$

Donc : $(p;q) \in \{(1;1);(2;1);(3;1);(1;2);(2;2);(3;2)$

$(4;2);(5;2);(6;2);(1;3);(2;3);...;(9;3)\}$

Donc : $E_5=\left\{1;2;3;\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right\}$

Exercice2 $A=[0;1[$: et $B=\left\{\frac{x}{x+1} / x \in \mathbb{R}^+\right\}$

Montrons que : $A=B$

Solution : Conseils méthodologiques :

Pour montrer que $A=B$, on montre que : $A \subset B$ et que $B \subset A$.

a) Montrons que $A \subset B$?

Soit $y \in A \Rightarrow 0 \leq y \prec 1$

Montrons que : $y \in B$

C'est-à-dire : Montrons que : $\exists x \in \mathbb{R}^+ / y=\frac{x}{x+1}$

$y=\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1)=x \Leftrightarrow xy+y=x \Leftrightarrow x(1-y)=y$

$y=\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y} \in \mathbb{R}^+$ Car $0 \leq y \prec 1$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R}^+ / y=\frac{x}{x+1}$

Par suite : $y \in B$ et alors : $A \subset B$

a) Montrons que $B \subset A$?

Soit $y \in B \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ / y=\frac{x}{x+1}$

Montrons que : $y \in A$

C'est-à-dire : Montrons que : $0 \leq y \prec 1$?

On a : $x \in \mathbb{R}^+$ $et\ y=\frac{x}{x+1}$ donc : $0 \leq y$

$1-y=1-\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-x}{x+1}=\frac{1}{x+1} \succ 0$ Car $0 \leq x$

Donc : $y \prec 1$ et alors : $0 \leq y \prec 1$

Donc : $y \in A$

Par suite : $B \subset A$

Conclusion : $A=B$

Exercice3 : Soient les ensembles : $A=[1,3]$ et $B=[2,4]$

Décrire les ensembles : $A \cap B$; $A \cup B$ et $A-B$

Solution : $A \cap B=[2,3]$ et $A \cup B=[1,4]$

Exercice4 : Soient les ensembles : $A=]-\infty,3]$; $B=]-2,7]$ et $C=]-5,+\infty[$ Trois parties de $\mathbb{R}$.

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R}-A$; $A-B$. $(\mathbb{R}-A) \cap (\mathbb{R}-B)$; $\mathbb{R}-(A \cup B)$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cap(B\cup C)$

Solution : $A\cap B=]-2,3]$ et $A\cup B=]-\infty,7]$

$B\cap C=]-2,7]$ et $B\cup C=]-5,+\infty[$

$\mathbb{R}-A=]3,+\infty[$; $A-B=]-\infty,-2]$

$(\mathbb{R}-A)\cap(\mathbb{R}-B)=]3,+\infty[\cap(]-\infty,-2]\cup]7,+\infty[)$

$=(]3,+\infty[\cap]-\infty,-2])\cup(]3,+\infty[\cap]7,+\infty[)=\varnothing\cup]7,+\infty[=]7,+\infty[$

Donc : $(\mathbb{R}-A)\cap(\mathbb{R}-B)=]7,+\infty[$

Ou mieux : $(\mathbb{R}-A)\cap(\mathbb{R}-B)=\mathbb{R}-(A\cup B)=]7,+\infty[$

$\mathbb{R}-(A\cup B)=]7,+\infty[$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=]-2,3]\cup]-5,3]=]-5,3]$

$A\cap(B\cup C)=]-\infty,3]\cap]-5,+\infty[=]-5,3]$

Exercice5 : A ; B sont des parties d'un ensemble E

1)Montrer que : $A\subset B\Leftrightarrow \overline{A}\cup B=E$

2)Montrer que : $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}$

Solution :1) $\Rightarrow)$ Montrons que : $A\subset B\Rightarrow \overline{A}\cup B=E$

On suppose que : $A\subset B$

a) On a : $\overline{A}\cup B\subset E$ évident

b) Montrons que : $E\subset\overline{A}\cup B$??

Soit $x\in E$: si $x\in A$ alors $x\in B$ car $A\subset B$

Donc : $x\in\overline{A}\cup B$

si $x\notin A$ alors $x\in\overline{A}$

Donc : $x\in\overline{A}\cup B$

Donc : $E\subset\overline{A}\cup B$

Par suite : $\overline{A}\cup B=E$

$\Leftarrow)$ On suppose que : $\overline{A}\cup B=E$

Montrons que : $A\subset B$??

Soit $x\in A$ Donc : $x\notin\overline{A}$

Supposons que : $x\notin B$

Alors : $x\notin\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

Alors : $x\in A\cap B$ donc : $x\in B$ contradiction

Donc : $x\in B$

Donc : $A\subset B$

Conclusion : $A\subset B\Leftrightarrow\overline{A}\cup B=E$

2) $\Rightarrow)$ Montrons que : $A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\subset\overline{B}$

On suppose que : $A\cap B=\varnothing$

Montrons que : $A\subset\overline{B}$?

Soit $x\in A$ alors $x\notin B$ car $A\cap B=\varnothing$

Par suite : $x\in\overline{B}$

$\Leftarrow)$ Montrons que : $A\subset\overline{B}\Rightarrow A\cap B=\varnothing$

On suppose que : $A \subset \overline{B}$
Montrons que : $A \cap B = \varnothing$?
Supposons que : $A \cap B \neq \varnothing$
Donc : $\exists x \in A \cap B$
Donc : $x \in A$ et $x \in B$ Donc : $\boxed{x \notin \overline{B}}$
On a : $x \in A$ et puisque $A \subset \overline{B}$
Alors : $\boxed{x \in \overline{B}}$ contradiction
Par suite : $A \cap B = \varnothing$
Donc : $A \subset \overline{B} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$
Conclusion : $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$

Exercice6 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble non vide E

Monter que : $\begin{cases} \left(\overline{B-C}\right) \cup A = E \\ \left(\overline{C-D}\right) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$

Solution : On suppose que : $\left(\overline{B-C}\right) \cup A = E$ et $\left(\overline{C-D}\right) \cup A = E$

Remarquer que : $A \cup B = E \Rightarrow \overline{A} \subset B$
Donc : $B-C \subset A$ et $C-D \subset A$ cad
$B \cap \overline{C} \subset A$ et $C \cap \overline{D} \subset A$
Montrons que : $B-D \subset A$ cad $B \cap \overline{D} \subset A$?
Soit $x \in B \cap \overline{D}$
$x \in B \cap \overline{D} \Leftrightarrow x \in B$ et $x \in \overline{D}$

- Si $x \in C$ alors $x \in C \cap \overline{D}$ donc $x \in A$ car $C \cap \overline{D} \subset A$
- Si $x \notin C$ alors $x \in B \cap \overline{C}$ donc $x \in A$ car $B \cap \overline{C} \subset A$

Dans tous les cas : $(B-D) \subset A$

Exercice7 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E
La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble
Qu'on note : $A\Delta B$ tel que : $A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

1)Monter que : $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

2) Calculer $A\Delta B$ pour : A = {0, 1, 2, 3} et B = {2, 3, 4}.

3)Monter que : $A\Delta B = \left(A - (A \cap B)\right) \cup \left(B - (A \cap B)\right)$

4) Supposons que : $A\Delta B = A \cap B$
Monter que : $A = B = \varnothing$

5) Monter que : $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$

6) Monter que : $\forall C \in P(E)$: $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$

7) Résoudre l'équation d'inconnue : $X \in P(E)$; $A\Delta X = \varnothing$

Solution : 1) $A\Delta B = (A-B) \cup (B-A) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$

$= \left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup B\right] \cap \left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \overline{A}\right] = (A \cup B) \cap \left(B \cup \overline{B}\right) \cap \left(A \cup \overline{A}\right) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{A}\right)$

$= (A \cup B) \cap E \cap E \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = (A \cup B) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2) Pour A = {0, 1, 2, 3} et B = {2, 3, 4}, on a A∆B = {0, 1, 4}.
3) Procédons par double-inclusion.
Montrons que : $A\Delta B \subset \left(A - (A \cap B)\right) \cup \left(B - (A \cap B)\right)$
Soit x ∈ A∆B.

Par définition, x ∈ A ∪ B, donc x ∈ A ou x ∈ B.
Supposons d'abord que x ∈ A, l'autre cas étant symétrique. Par définition de la différence symétrique x ∉A ∩ B, on a donc bien x ∈ A \ A ∩ B.
Par symétrie, si x ∈ B, on aura x ∈ B \ A ∩ B. Conclusion : On a montré que pour tout x ∈ AΔB, on a x ∈ A \ A ∩ B ou x ∈ B \ A ∩ B, c'est-à-dire :
AΔB ⊆ (A \ A ∩ B) ∪ (B \ A ∩ B).
Montrons que (A \ A ∩ B) ∪ (B \ A ∩ B) ⊆ AΔB.
La preuve est similaire.
Conclusion : $A\Delta B=\left(A-\left(A\cap B\right)\right)\cup\left(B-\left(A\cap B\right)\right)$

4) Supposons que : $A\Delta B=A\cap B$
Montrons que : $A=B=\varnothing$
Pour montrer que A = B = ∅, il nous suffit de montrer que :
A = ∅, car A et B jouent des rôles symétriques.
Montrons donc que A = ∅.
Supposons par l'absurde qu'il existe a ∈ A.
Deux cas sont alors possibles :
1er cas : a ∈ B. On a : a ∈ A ∩ B = AΔB.
Or, par définition de la différence symétrique, a ∉A ∩ B, une contradiction.
2nd cas : a ∉B. On a alors que : a ∉ A ∩ B.
Puisque a ∈ A, on a que a ∈ A ∪ B, et donc a ∈ AΔB.
Or, AΔB = A∩B, donc a ∈ A∩B, donc : a ∈ B, une contradiction.
Conclusion : Tous les cas mènent à une contradiction, c'est donc qu'il n'existe pas de a ∈ A, et donc A = ∅

5)Montrons que : $\overline{A}\Delta\overline{B}=\left(\overline{A}-\overline{B}\right)\cup\left(\overline{B}-\overline{A}\right)=\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap A\right)=\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)=A\Delta B$

6) Soit $C\in P\left(E\right)$

- Si on a : $B=C$ alors $A\Delta B=A\Delta C$
- Supposons que : $A\Delta B=A\Delta C$ et montrons que $B=C$?
  - ✓ Soit $x\in B$ montrons que $x\in C$?

Si $x\in A$:
($x\in A$ et $x\in B$)$\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\notin A\Delta B\Rightarrow x\notin A\Delta C$
(Car $A\Delta B=A\Delta C$)
$$\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in C$$
Donc : $A\cap B\subset C$ **(1)**
Si $x\notin A$:
($x\notin A$ et $x\in B$)$\Rightarrow x\in B-A\Rightarrow x\in A\Delta B\Rightarrow x\in A\Delta C$
(Car $A\Delta B=A\Delta C$)
$$\Rightarrow x\in C-A\Rightarrow x\in C$$
Donc $\overline{A}\cap B\subset C$ **(2)**
De **(1) et (2)** en déduit que : $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\subset C$

Et puisque : $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=\left(A\cup\overline{A}\right)\cap B=E\cap B=B$

Alors $B\subset C$
De même on montre que : $C\subset B$
Donc : $A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C$
Finalement : $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

7) Résolvons l'équation d'inconnue : $X\in P\left(E\right)$; $A\Delta X=\varnothing$

On a que AΔA = A ∪ A \ A ∩ A = A \ A = ∅,
Donc : A est solution de l'équation. De plus, n'importe quelle partie X de E satisfaisant AΔX = ∅ satisferait

A∆X = A∆A. Or, par la question précédente, on a dans ce cas X = A.
Conclusion : La seule solution de l'équation est la partie A.

Exercice8 : Soient les ensembles : $E=\{a;b;c;d\}$ et $F=\{1;2\}$

1)Déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.
2)Déterminer en extension : les produits cartésiens suivants :
$E\times F$ et F^2 et déterminer : $card\left(E\times F\right)$

Solution : $P(E)=\{\varnothing;\{a\};\{b\};\{c\};\{d\};\{a;b\};\{a;c\};\{a;d\};\{b;c\};\{b;d\};\{c;d\};\{a;b;c\};\{a;b;d\};$
$;\{b;c;d\};\{a;c;d\};E\}$

2) $E\times F=\{(a;1);(a;2);(b;1);(b;2);(c;1);(c;2);(d;1);(d;2)\}$

$F^2=F\times F=\{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$

$card\left(E\times F\right)=card\left(E\right)\times card\left(F\right)=4\times 2=8$

Exercice9 : Soit l'ensemble : $F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\le y \text{ et } y^2\le x\}$

1) Vérifier que : $F\neq\varnothing$
2) Montrer que : $F\subset[0;1]\times[0;1]$

Solution : 1) On a : $0^2\le 0 \text{ et } 0^2\le 0$

Donc : $(0;0)\in F$ par suite : $F\neq\varnothing$

2) Montrons que : $F\subset[0;1]\times[0;1]$?

Soit :$(x;y)\in F \Rightarrow (x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\le y \text{ et } y^2\le x$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \text{ et } y\in\mathbb{R}^+ \text{ et } x^2\le y \text{ et } y^2\le x$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \text{ et } y\in\mathbb{R}^+ \text{ et } x^4\le y^2 \text{ et } y^2\le x$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \text{ et } y\in\mathbb{R}^+ \text{ et } x^4\le x$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \text{ et } x^4-x\le 0$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \text{ et } x\left(x^3-1\right)\le 0$

$\Rightarrow x\ge 0 \text{ et } x^3\le 1^3 \Rightarrow 0\le x\le 1$

De la même manière on montre que : $0\le y\le 1$

$\Rightarrow (x;y)\in[0;1]\times[0;1]$

Donc : $F\subset[0;1]\times[0;1]$

Exercice10 : Soient E et F deux ensembles.
1) Montrons que : $\mathcal{P}(E)$ ∪ $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F).
2) Montrons que : $\mathcal{P}$ (E ∩ F) = $\mathcal{P}$ (E) ∩ $\mathcal{P}$ (F).
Solution : 1) Montrons que
Pour montrer qu'une union est incluse dans un ensemble, il suffit de montrer que chaque terme de l'union est inclus dans l'ensemble. Montrons que $\mathcal{P}$ (E) ⊆ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Soit A ∈ $\mathcal{P}$ (E), montrons que A ∈ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Pour tout a ∈ A, on a que a ∈ E, et donc a ∈ E ∪ F,
Donc : A ⊆ E ∪ F
C'est-à-dire : A ∈ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Ceci étant vrai pour tout élément A de P(E)
On a bien $\mathcal{P}$ (E) ⊆ $\mathcal{P}$ (E∪F).
Montrons que $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E∪F).

Comme E et F jouent des rôles symétriques
et que $\mathcal{P}$ (E) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F)
On a également $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F).
Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}$ (E) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F)
et $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F), donc $\mathcal{P}$ (E) ∪ $\mathcal{P}$ (F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E ∪ F). Montrons qu'en général, on n'a pas :
$\mathcal{P}$ (E ∪ F) ⊆ $\mathcal{P}$ (E) ∪ $\mathcal{P}$ (F).
Pour cela, il faut que l'on exhibe un contre-exemple à cette proposition. Prenons E = {0} et F = {1}.
On a alors E ∪ F = {0, 1} et donc : $\mathcal{P}$ (E) = {∅, {0}},
$\mathcal{P}$ (F) = {∅, {1}}, $\mathcal{P}$ (E) ∪ $\mathcal{P}$ (F) = {∅, {0}, {1}},
$\mathcal{P}$ (E ∪ F) = {∅, {0}, {1}, {0, 1}}, ce qui montre bien que dans cet exemple $\mathcal{P}$ (E) ∪ $\mathcal{P}$ (F) ≠ $\mathcal{P}$ (E ∪ F).
2) Montrons que $\mathcal{P}$ (E ∩ F) = $\mathcal{P}$ (E) ∩ $\mathcal{P}$ (F).
Pour A un ensemble, on a que A ⊆ E ∩ F
Équivaut A ⊆ E et A ⊆ F, par définition de l'intersection. Autrement dit, on a équivalence entre A ∈ $\mathcal{P}$ (E ∩ F)
et A ∈ $\mathcal{P}$ (E) ∩ $\mathcal{P}$ (F), d'où le résultat.

Exercice11 : Soient les ensembles : $H=\left\{ y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$

$G=\left\{ y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $H=]0;1]$

a) Considérer un élément $y_0\in H$ et montrer que : $y_0\in]0;1]$

b) Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrer que : $y_0\in H$.

2)Monter que $G\subset H$

3) Est-ce que $G=H$?

Solution : 1)a) soit un élément $y_0\in H$ montrons que $y_0\in]0,1]$?

$y_0\in H\Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R} / y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2+1}}$

On a $x_0{}^2\geq 0\Rightarrow x_0{}^2+1\geq 1\Rightarrow\sqrt{x_0{}^2+1}\geq 1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2+1}}\leq 1\Rightarrow y_0\in]0,1]$ Donc : $H\subset]0;1]$ **(1)**

b) Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrons que $y_0\in H$?

$y_0\in]0;1]\quad \exists ? x_0\in\mathbb{R} / y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2+1}}$

$y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2+1}}\Leftrightarrow y_0{}^2=\frac{1}{x_0{}^2+1}\Leftrightarrow x_0{}^2=\frac{1}{y_0{}^2}-1$

Or : $y_0\in]0;1]$ donc $0\prec y_0\leq 1$ donc : $\frac{1}{y_0{}^2}-1\geq 0$

Donc : il suffit de prendre : $x_0=\sqrt{\frac{1}{y_0{}^2}-1}$ Donc : $y_0\in H$

Donc : $]0;1]\subset H$ **(2)**

De : (1) et (2) en déduit que **:** $H=]0;1]$

2) Montrons que $G\subset H$?

Montrons que : $G\subset]0;1]$?

Soit un élément $y_0\in G$ montrons que $y_0\in]0,1]$?

$y_0 \in G \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \dfrac{1}{1+\sqrt{x_0^{\,2}+1}}$

On a $x_0^{\,2} \geq 0 \Rightarrow x_0^{\,2}+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_0^{\,2}+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_0^{\,2}+1}+1 \geq 2 \Rightarrow 0 \prec \dfrac{1}{1+\sqrt{x_0^{\,2}+1}} \leq \dfrac{1}{2} \leq 1$

Donc : $y_0 \in]0,1]$ Donc : $G \subset H$

3)supposons : $G = H$

On a $1 \in H \Rightarrow 1 \in G$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / 1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{x_0^{\,2}+1}} \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / 1+\sqrt{x_0^{\,2}+1} = 1 \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / \sqrt{x_0^{\,2}+1} = 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / x_0^{\,2} = -1$ Absurde donc : $H \neq G$

Exercice12 : Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Telle que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

1) Montrer que : $f(0) = 0$

2) Montrer que : $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$

3) On suppose que : $f(1) \neq 0$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n) = n$

b) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z}$; $f(m) = m$

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$

d) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q}$; $f(r) = r$

Solution : 1) On a : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x+y) = f(x)+f(y)$

Pour : $x = 0 \text{ et } y = 0$

On a donc : $f(0+0) = f(0)+f(0)$

$\Rightarrow f(0)+0 = f(0)+f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

2) On a : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

Pour : $x = 1 \text{ et } y = 1$

On a donc : $f(1\times 1) = f(1) \times f(1)$

$\Rightarrow f(1) = f(1) \times f(1) \Rightarrow f(1) - f(1) \times f(1) = 0$

$\Rightarrow f(1)(1-f(1)) = 0 \Rightarrow 1-f(1) = 0 \text{ ou } f(1) = 0$

$\Rightarrow f(1) = 1 \text{ ou } f(1) = 0$

3) On suppose que : $f(1) \neq 0$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n) = n$

Notons P(n) La proposition : ' $f(n) = n$ '

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons : $f(0) = 0$

Donc : P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

C'est-à-dire : $f(n)=n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $f(n+1)=n+1$??

$f(n+1)=f(n)+f(1)$ Mais on a : $f(n)=n$ et $f(1)=1$

Alors : $f(n+1)=n+1$

Donc : P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}$; $f(n)=n$

b) Montrons que : $\forall m\in\mathbb{Z}$; $f(m)=m$

Soit : $m\in\mathbb{Z}$

Cas1 : Si $m\in\mathbb{N}$ d'après a) on a : $f(m)=m$

Cas2 : Si $m\in\mathbb{Z}^-$ alors : $-m\in\mathbb{N}$

Donc : $f(-m)=-m$

On a aussi : $f(m+(-m))=f(0)=0$

Donc : $f(m)+f(-m)=0$

Donc : $f(m)=-f(-m)=-(-m)=m$

Donc dans tous les cas : $f(m)=m$

Conclusion : $\forall m\in\mathbb{Z}$; $f(m)=m$

c) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$: On a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

Donc : $f\left(n\times\frac{1}{n}\right)=f(n)\times f\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)=1$

Donc : $f(n)\times f\left(\frac{1}{n}\right)=1$

Donc : $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n}$ car $f(n)=n$

d) Montrons que : $\forall r\in\mathbb{Q}$; $f(r)=r$

Soit : $r\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists(m;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que : $r=\frac{m}{n}$

$f(r)=f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\times\frac{1}{n}\right)=f(m)\times f\left(\frac{1}{n}\right)=m\times\frac{1}{n}=r$

Conclusion : $\forall r\in\mathbb{Q}$; $f(r)=r$

Exercice13 : Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

1) $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 2) $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto x^2\end{array}$ 3) $h:\begin{array}{l}[0;1]\to[0;2]\\ x\mapsto x^2\end{array}$

Solution : <u>Conseils méthodologiques :</u>

(Pour montrer que f est ou n'est pas bijective)

1. Pour montrer que f n'est pas bijective : on montre qu'elle n'est pas injective ou pas surjective ;
2. Pour montrer que f est bijective :

a. On choisit y ∈ F , et on montre que cet élément admet un unique antécédent dans E par f ;
b. On montre que f est à la fois injective et surjective ;
c. On détermine la bijection réciproque f^{-1}.

1) $f:\begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{matrix}$; $f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.

-1 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc : f n'est pas surjective.
Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

2)a) $g:\begin{matrix}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto x^2\end{matrix}$ Soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$

$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$ car $x_1\ge 0$ ≥ 0 et $x_2\ge 0$

Donc f est injective

b) Soit $y\in\mathbb{R}^+$: $g(x)=y\Leftrightarrow x^2=y\Leftrightarrow x=\sqrt{y}\quad (x\in\mathbb{R}^+)$

Pour tout $y\in\mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x=\sqrt{y}\in\mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $g(x)=y$, donc f est surjective.

f est donc bijective

3) $h:\begin{matrix}[0;1]\to[0;2]\\ x\mapsto x^2\end{matrix}$

a) Soient $x_1\in[0;1]$ et $x_2\in[0;1]$

$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2$

$\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$ car $x_1\ge 0$ ≥ 0 et $x_2\ge 0$

Donc h est injective

b) 2 n'a pas d'antécédent, car $h(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans [0,1]. h N'est pas surjective

h N'est pas bijective

Exercice14 : Soit l'application : $f:\begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x}{1+|x|}\end{matrix}$

1) Montrer que f est injective
2) f est-elle surjective ?

Solution : Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow\left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right|=\left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|$$

$$\Rightarrow\frac{|x_1|}{1+|x_1|}=\frac{|x_2|}{1+|x_2|}\Rightarrow|x_1|(1+|x_2|)=|x_2|(1+|x_1|)$$

$$\Rightarrow|x_1||x_2|+|x_1|=|x_1||x_2|+|x_2|\Rightarrow|x_1|=|x_2|$$

On remplace dans : $\dfrac{x_1}{1+|x_1|}=\dfrac{x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow\dfrac{x_1}{1+|x_1|}=\dfrac{x_2}{1+|x_1|}\Rightarrow x_1=x_2$

Donc f est injective

2) $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: on a : $x\le|x|\prec|x|+1$

Donc : $\frac{x}{1+|x|}\prec\frac{1+|x|}{1+|x|}$ c'est-à-dire : $f(x)\prec 1$:

Par exemple 1 ou 2 n'admet pas d'antécédents
Donc f n'est pas surjective

Exercice15 :1) Soit l'application f : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$

a) f est-elle injective ? b) f est-elle surjective ?

2) Soit l'application g : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$

a) g est-elle surjective ? b) g est-elle injective ?

Solution :1) a) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$ On remarque que f est paire

f n'est pas injective en effet : On a : $f(-1)=\sqrt{(-1)^2+4|-1|}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ et $f(1)=\sqrt{1^2+4}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

Donc : $f(-1)=f(1)$ mais $-1\neq 1$

b) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$ On remarque que : $\sqrt{x^2+4|x|}\ge 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\ge 0$

f n'est pas surjective en effet : $-1\in\mathbb{R}$ et l'équation : $\sqrt{x^2+4|x|}=-1$ n'a pas de solution

2) Soit l'application g : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto\sqrt{x^2+4|x|}\end{array}$

Soit $y\in\mathbb{R}^+$: $\sqrt{x^2+4|x|}=y\Leftrightarrow x^2+4|x|=y^2\Leftrightarrow x^2+4|x|-y^2=0$

$\sqrt{x^2+4|x|}=y\Leftrightarrow |x|^2+4|x|-y^2=0$

On pose : $|x|=X$: $X^2+4X-y^2=0$ $\Delta=16+4y^2\succ 0$

Donc : 2 solutions : $|x|=\frac{-4+\sqrt{16+4y^2}}{2}$ et $|x|=\frac{-4-\sqrt{16+4y^2}}{2}$

On a : $\frac{-4+\sqrt{16+4y^2}}{2}\ge 0$ car $\sqrt{16+4y^2}\ge\sqrt{16}=4$ Mais : $\frac{-4-\sqrt{16+4y^2}}{2}\prec 0$ Donc : $|x|=\frac{-4+\sqrt{16+4y^2}}{2}$

Alors : $x=\frac{-4+\sqrt{16+4y^2}}{2}$ ou $x=\frac{4-\sqrt{16+4y^2}}{2}$

Donc : $\forall y\in\mathbb{R}^+\ \exists x\in\mathbb{R}/g(x)=y$ Conclusion : g est surjective

b) g n'est pas injective car : L'équation : $\sqrt{x^2+4|x|}=y$ admet deux solutions

On a : $g(-1)=\sqrt{(-1)^2+4|-1|}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ et $g(1)=\sqrt{1^2+4}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

Donc : $g(-1)=g(1)$ mais $-1\neq 1$

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f :]1;+\infty[\to]0;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{2}{x-1} \end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Solution : Soient $y \in]0;+\infty[$: Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} = y \\ x \in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \dfrac{2}{y} \\ x \in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{y}+1$$

$(\forall\, y \in]0;+\infty[\,)\ (\exists\,!\ \boldsymbol{x} \in]1;+\infty[\,)\ (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Donc : f est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in]0;+\infty[\end{cases}$$

$\forall y \in]0;+\infty[\quad f^{-1}(y) = \dfrac{2}{y}+1$ Donc : $\begin{array}{l} f^{-1} :]0;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{2}{x}+1 \end{array}$

Exercice17 : Soit la fonction φ définie par : $\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si\ \ x\ est\ \ pair \\ -\dfrac{x+1}{2} & si\ \ x\ est\ \ impair \end{cases} \end{array}$

Montrer que φ est une bijection

Solution : Vérifions que φ est injective.

Supposons que $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors

• si $\varphi(x) \geq 0$ alors x est pair, y aussi

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow x = y$$

• si $\varphi(x) \prec 0$ alors x et y sont impairs

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow -\frac{x+1}{2} = -\frac{y+1}{2} \Rightarrow x+1 = y+1 \Rightarrow x = y$$

Donc : φ est injective.

Vérifions que ϕ est surjective.

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $\varphi(2n) = n$, et $2n \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{Z}$ et $m \prec 0$

Alors : $\varphi(-2m-1) = m$ avec $-2m-1 \in \mathbb{N}$

Donc : φ est surjective.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien