1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°3 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$E_1=\{x\in\mathbb{Z}/k^2\leq 7\}$

$E_2=\{k\in\mathbb{Z}/7\leq k^2\leq 35\}$

$E_3=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/(x+y)(x-y)=32\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/0\prec 2xy\leq 7\}$

$E_5=\left\{x\in\mathbb{Z}^*/(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\geq\frac{n}{n+1}\right\}$

Solution : $k\in E_1\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $k^2\leq 7$

$\Leftrightarrow |k|\leq\sqrt{7}\Leftrightarrow -\sqrt{7}\leq k\leq\sqrt{7}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $E_1=\{-2;-1;0;1;2\}$

$k\in E_2\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $7\leq k^2\leq 35\Leftrightarrow\sqrt{7}\leq|k|\leq\sqrt{35}\Leftrightarrow|k|\in\{3;4;5\}\Leftrightarrow k\in\{-5;-4;-3;3;4;5\}$ Donc :

$E_2=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$..

$E_3=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/(x+y)(x-y)=32\}$?

Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité et $x+y\geq x-y$ $32=2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$E_3=\{(6;2);(9;7)\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/0\prec 2xy\leq 7\}$?

Soit : $(x;y)\in E_4$ donc : $0\prec 2xy\leq 7$ donc : $2xy$ est u nombre relatif pair inferieur a 7

Donc : $(x;y)\in E_4\Leftrightarrow 2xy=2$ ou $2xy=4$ ou $2xy=6$

$(x;y)\in E_4\Leftrightarrow xy=1$ ou $xy=2$ ou $xy=3$

Donc : $E_4=\{(-1;-1);(1;1);(1;2);(-1;-2);(2;1);(-2;-1);$

$(1;3);(-1;-3);(3;1);(-3;-1)\}$..

$E_5=\left\{x\in\mathbb{Z}^*/(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\geq\frac{n}{n+1}\right\}$?

Soit : $x\in E_5$ donc : $x\in\mathbb{Z}^*$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\geq\frac{n}{n+1}$

Alors $x\in\mathbb{N}^*$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\frac{1}{x}\geq\frac{n}{n+1}\Rightarrow(\forall n\in\mathbb{N}^*)x\leq\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\prec 2\Rightarrow x\prec 2$

Alors $E_5\subset\{1\}$

Inversement : $\{1\} \subset E_5$ car : $1 \in E_5$

En effet : $1 \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{1} = 1 \geq \frac{n}{n+1}$

Conclusion : $E_5 = \{1\}$

Exercice2 : $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left|1 - \frac{x}{2}\right| \prec 1 \right\}$ et $B =]0;4[$

Montrons que : $A = B$

Solution : Conseils méthodologiques : Pour montrer que $A = B$, on montre que :
a) $A \subset B$ et que $B \subset A$.
b) ou bien on montre que : $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\left|1 - \frac{x}{2}\right| \prec 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $-1 \prec 1 - \frac{x}{2} \prec 1$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $-2 \prec -\frac{x}{2} \prec 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $0 \prec x \prec 4 \Leftrightarrow x \in B =]0;4[$

Donc on a : $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
Donc : $A = B$

Exercice3 : $A = \{ x \in \mathbb{R} / |x+1| \succ 3 \}$ et $B = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x \succ 15 \}$

1)Ecrire en compréhension les ensembles : $\overline{A}$ et $\overline{B}$
2) Comparer : $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$

Solution :1)$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow |x+1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$

Donc on a : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in [-4;2]$

Donc : $\overline{A} = [-4;2]$

$x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \notin B \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq 15 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 \leq 0$

$\Delta = 64 \succ 0$ et $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$

Donc on a : $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in [-5;3]$

Donc : $\overline{B} = [-5;3]$

2)On a : $\overline{A} = [-4;2]$ et $\overline{B} = [-5;3]$

Donc : $\overline{A} \subset \overline{B}$

Exercice4 : Soit l'ensemble suivant : $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n \times m} / n \in \mathbb{N}^* \text{ } et \text{ } m \in \mathbb{N}^* \right\}$

1) Montrer que : $0 \notin A$ et $\frac{1}{2} \in A$

2) Montrer que : $A \subset]0;1]$

3) Est-ce que $A =]0;1]$?

Solution :1) a) Montrons que : $0 \notin A$
Supposons par l'absurde que : $0 \in A$

$0 \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ } et \text{ } \exists m \in \mathbb{N}^* / 0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n \times m}$

$0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n \times m} \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{n \times m} \Leftrightarrow \frac{n+m}{n \times m} = \frac{1}{n \times m}$

$\Leftrightarrow n + m = 1$ et $n \in \mathbb{N}^* \text{ } et \text{ } \exists m \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n+(m-1)=0$ et $n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n=0$ et $m-1=0$ car $n\in\mathbb{N}^*$ et $m-1\in\mathbb{N}$

Contradiction : $n\in\mathbb{N}^*$ et $n=0$

Donc : $0\notin A$

b) Montrons que : $\frac{1}{2}\in A$

$\frac{1}{2}\in A\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}^* / \frac{1}{2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m}$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}^* / \frac{1}{2}=\frac{m+n-1}{n\times m}$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}^* / n\times m=2m+2n-2$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}^* / n\times m-2m-2n+2=0$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}^* / m(n-2)-2(n-2)-4+2=0$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}^* / (n-2)(m-2)=2$ Vraie

Il suffit de prendre : $n-2=1$ et $m-2=2$

C'est-à-dire : Il suffit de prendre : $n=3$ et $m=4$

On peut vérifier que : $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3\times 4}$ car : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3\times 4}=\frac{7}{12}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

Par suite : $\frac{1}{2}\in A$

2) Montrons que : $A\subset]0;1]$

Soit : $r\in A$ Montrons que : $r\in]0;1]$?

$r\in A\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*$ et $\exists m\in\mathbb{N}^* / r=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m}$

On va raisonner par équivalence : $0\prec \frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m}\le 1\Leftrightarrow 0\prec\frac{m+n-1}{n\times m}\le 1$

$\Leftrightarrow 0\times n\times m\prec m+n-1\le 1\times n\times m$

$\Leftrightarrow 0\prec m+n-1\le n\times m\Leftrightarrow 0\prec m+n-1$ et $m+n-1\le n\times m$

$\Leftrightarrow 0\prec m+n-1$ et $m+n-n\times m-1\le 0$

$\Leftrightarrow 0\prec m+n-1$ et $m(1-n)+(n-1)\le 0$

$\Leftrightarrow 0\prec m+n-1$ et $(n-1)(1-m)\le 0$

Or on a : $n\in\mathbb{N}^*$ donc : $n\ge 1$ et $m\in\mathbb{N}^*$ donc : $m\ge 1$

Donc : $n+m-1\ge 2-1\succ 0$

Et On a : $n\ge 1$ et $m\ge 1$ donc : $n-1\ge 0$ et $m-1\ge 0$

Par suite : $(n-1)(1-m)\le 0$

Alors : $0\prec m+n-1$ et $(n-1)(1-m)\le 0$ vraie

Par suite : $0\prec\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m}\le 1$ vraie

Conclusion : $A\subset]0;1]$

3) Est-ce que $A=]0;1]$?

On remarque que : $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{n\times m} / n\in\mathbb{N}^*\ et\ m\in\mathbb{N}^*\right\}\subset\mathbb{Q}$

On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \left]0;1\right]$ mais $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ donc : $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin A$

Conclusion : $A \neq \left]0;1\right]$

Exercice5 : Soient les ensembles : $A = \{1;2;3\}$ et $B = \{0;1;2;3\}$

Décrire les ensembles : $A \cap B$; $A \cup B$ et $A - B$ et $A \times B$

Solution : $A \cap B = \{x / x \in A \ \ et\, x \in B\} = \{1;2;3\}$

$A \cup B = \{x / x \in A \ \ ou \ \ x \in B\} = \{0;1;2;3\}$

Remarque : Comme $A \subset B$ on a $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

$B - A = \{x / x \in B \ \ et \ \ x \notin A\} = \{0\}$

$A \times B$ = {(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3) }

Exercice6 :1) Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :

$A = \left]-\infty, 2\right]$; $B = \left]-1, +\infty\right[$; $C = \left[2, 3\right[$

2) Soient : $E = \left]-\infty, 1\right] \cup \left]2; +\infty\right[$; $F = \left]-\infty, 1\right]$; $G = \left]2; +\infty\right[$

Comparer les ensembles suivants : $C_{\mathbb{R}}^{E}$ et $C_{\mathbb{R}}^{F} \cap C_{\mathbb{R}}^{G}$

Solution : 1) $C_{\mathbb{R}}^{A} = C_{\mathbb{R}}^{]-\infty,2]} = \left]2, +\infty\right[$

$C_{\mathbb{R}}^{B} = C_{\mathbb{R}}^{]-1,+\infty[} = \left]-\infty, -1\right]$

$C_{\mathbb{R}}^{C} = C_{\mathbb{R}}^{]2,3]} = \left]-\infty, 2\right] \cup \left]3, +\infty\right[$

2) $C_{\mathbb{R}}^{]-\infty,1]\cup]2;+\infty[} = \left]1, 2\right]$

$C_{\mathbb{R}}^{F} \cap C_{\mathbb{R}}^{G} = C_{\mathbb{R}}^{]-\infty,1]} \cap C_{\mathbb{R}}^{]2;+\infty[} = \left]1, +\infty\right[\cap \left]-\infty, 2\right]$

$C_{\mathbb{R}}^{F} \cap C_{\mathbb{R}}^{G} = \left]1, 2\right]$

Donc : $C_{\mathbb{R}}^{F} \cap C_{\mathbb{R}}^{G} = C_{\mathbb{R}}^{E}$

Remarque : $C_{\mathbb{R}}^{E \cup F} = C_{\mathbb{R}}^{E} \cap C_{\mathbb{R}}^{F} \quad et \quad C_{\mathbb{R}}^{E \cap F} = C_{\mathbb{R}}^{E} \cup C_{\mathbb{R}}^{F}$

Exercice7 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E

Monter que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases} \Leftrightarrow A \subset B$

Solution : $\Rightarrow$) On suppose que : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases}$

Montrons que $A \subset B$???

Conseils méthodologiques :

Pour montrer que $A \subset B$, on montre que : $x \in A \Rightarrow x \in B$

Soit : $x \in A \Rightarrow x \in A - C$ ou $x \in A \cap C$

Car : $A = (A - C) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow x \in B - C$ ou $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in B$ ou $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$

Donc : $A \subset B$

Par suite : $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases} \Rightarrow A \subset B$

$\Leftarrow)$ On suppose que : $A\subset B$ **et** Montrons que : $\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\ A-C\subset B-C\end{cases}$???

a) Montrons que : $A\cap C\subset B\cap C$

Soit : $x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \text{ et } x\in C$

$\Rightarrow x\in B \text{ et } x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cap C$

Donc : $A\cap C\subset B\cap C$

b) Montrons que : $A-C\subset B-C$

Soit : $x\in A-C \Rightarrow x\in A \text{ et } x\notin C \Rightarrow x\in B \text{ et } x\notin C$

$\Rightarrow x\in B-C$

Donc : $A-C\subset B-C$

En déduit donc que : $A\subset B\Rightarrow\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\ A-C\subset B-C\end{cases}$

Conclusion : $A\subset B\Leftrightarrow\begin{cases}A\cap C\subset B\cap C\\ A-C\subset B-C\end{cases}$

Exercice8 :

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E, on note : $U\Delta V=(U\setminus V)\cup(V\setminus U)$

1) Montrer que pour toutes parties : A ; B ; C d'un ensemble E

a) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$

b) $(A\cup C)\cap\left(\overline{A\cup B}\right)=\overline{A}\cap C\cap\overline{B}$

2) En déduire que : $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$

3) Montrer que : $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Solution :1) a) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)=(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)=\left(A\cap\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(B\cap\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)\right)$

$=\left(A\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)=\varnothing\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)=B\cap\overline{A}\cap\overline{C}=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$

b) Pour Cette égalité il suffit d'intervertir les rôles de B et C.

2) $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\left((A\cup B)\setminus(A\cup C)\right)\cup\left((A\cup C)\setminus(A\cup B)\right)$

$=\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap C\cap\overline{B}\right)=\overline{A}\cap\left(\left(B\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(C\cap\overline{B}\right)$

$=\overline{A}\cap\left((B\setminus C)\cup(C\setminus B)\right)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$

3) Montrons que : $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$A\cap(B\Delta C)=A\cap\left((B-C)\cup(C-B)\right)=A\cap\left(\left(B\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{B}\right)\right)$

$=\left(A\cap\left(B\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(A\cap\left(C\cap\overline{B}\right)\right)=\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$ ①

$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=\left((A\cap B)-(A\cap C)\right)\cup\left((A\cap C)-(A\cap B)\right)$

$=\left((A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\right)\cup\left((A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)\right)=\left((A\cap B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{C}\right)\right)\cup\left((A\cap C)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)$

$=\left(\left(A\cap B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(\left(A\cap C\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)\right)$

$=\left(\varnothing\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(\varnothing\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)\right)=\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)$ ②

① et ② affirment que : $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Exercice9 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$

Solution : Démontrons la double implication.

$\Rightarrow$) Evident. Car : si $A = B$

Alors : $A \cap A = A \cup A = A$

$\Leftarrow$) On suppose que : $A \cap B = A \cup B$

et on montre que : $A = B$

- ✓ Soit $x \in A$ montrons que $x \in B$?

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B$

C'est-à-dire : $x \in B$: Ceci signifie que : $A \subset B$ (1)

- ✓ Soit $x \in B$ montrons que $x \in A$?

$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B$

C'est-à-dire : $x \in A$: Ceci signifie que : $B \subset A$ (2)

D'après (1) et (2) on en déduit que : $A = B$

Conclusion : $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

Exercice10 : 1) E = {1, 2, 3}. Déterminer P(E)

2) Soient a, b, c, d des éléments distincts.

Ecrire P ({a, b, c, d}). Combien y a-t-il d'éléments ?

3)Essayer de deviner une formule donnant le nombre de parties d'un ensemble qui a n éléments.

Solution :1)P(E) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}. Ne pas oublier la partie vide, ni la partie pleine.

L'ensemble E a trois éléments, l'ensemble P(E) a : 8 éléments.

2) Dans P({a, b, c, d}), on a : Une partie à zéro élément, ∅

Quatre parties à un élément, {a}, {b}, {c}, {d},

Quatre parties à trois éléments

Six parties à deux éléments

Une partie à quatre éléments.

Nombre de parties : 1 + 4 + 4 + 6 + 1 = 16.

Un ensemble à n éléments a 2^n parties : on le vérifie par récurrence

Exercice11 : Soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1) Déterminer le complémentaire de $A \times F$ dans $E \times F$

2) Déterminer le complémentaire de $E \times F$ dans $E \times F$

3) Déterminer le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$

4) Monter que : $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing$

Solution : 1) le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$

Se note : $C_{E\times F}^{A\times B}$ ou $\overline{A \times B}$

$(x;y) \in \overline{A \times F} \Leftrightarrow (x;y) \notin A \times F \Leftrightarrow x \notin A \, ou \, y \notin F$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } y \in \overline{F} \Leftrightarrow (x;y) \in \overline{A} \times F \text{ ou } y \notin F$

$\Leftrightarrow (x;y) \in \overline{A} \times F \text{ ou } y \in \varnothing$ Car : $y \notin F$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{A \times F} = \overline{A} \times F$

2)$(x;y) \in \overline{E \times B} \Leftrightarrow (x;y) \notin E \times B \Leftrightarrow x \notin E ou y \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{E} ou y \in \overline{B} \Leftrightarrow (x;y) \in E \times \overline{B}$ ou $x \notin E$

$\Leftrightarrow (x;y) \in E \times \overline{B}$ Car : $x \notin E$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{E \times B} = E \times \overline{B}$

3) $(x;y) \in \overline{A \times B} \Leftrightarrow (x;y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A ou y \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} ou y \in \overline{B} \Leftrightarrow (x;y) \in \overline{A} \times F$ ou $(x;y) \in E \times \overline{B}$

$\Leftrightarrow (x;y) \in (\overline{A} \times F) \cup (E \times \overline{B})$

Donc : $\overline{A\times B}=\left(\overline{A}\times F\right)\cup\left(E\times\overline{B}\right)$

4) Monter que : $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing$

a) Montrons que : $A\times B=\varnothing \Rightarrow A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing$

Supp : $A\times B=\varnothing$ et Montrons que : $A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing$

Supp que : $A\neq\varnothing$ et $B\neq\varnothing$

Donc : $\exists x\in A$ et $\exists y\in B$

Donc : $\exists(x;y)\in A\times B$

Donc : $A\times B\neq\varnothing$ absurde car $A\times B=\varnothing$

Donc : $A\times B=\varnothing \Rightarrow A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing$

b) Montrons que : $A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing \Rightarrow A\times B=\varnothing$

Supp : $A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing$ et Montrons que : $A\times B=\varnothing$

Supp que : $A\times B\neq\varnothing$

Donc : $\exists(x;y)\in A\times B$

Donc : $\exists x\in A$ et $\exists y\in B$

Donc : $A\neq\varnothing$ et $B\neq\varnothing$ absurde car : $A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing$

Donc : $A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing \Rightarrow A\times B=\varnothing$

Conclusion : $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \ ou \ B=\varnothing$

Exercice12 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\rightarrow[2;+\infty[\\ x\mapsto x+\dfrac{1}{x}\end{array}$

1) Calculer : $f(1)$ et $f(2)$

2) Montrer que f est injective

3) Montrer que f est surjective

4) Montrer que f est bijective et Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f .

Solution : 1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

$f(1)=1+\dfrac{1}{1}=2$ et $f(2)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

2) Soient $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\dfrac{1}{x_1}=x_2+\dfrac{1}{x_2}$

$\Rightarrow\dfrac{x_1^{\ 2}+1}{x_1}=\dfrac{x_2^{\ 2}+1}{x_2}\Rightarrow x_2\left(x_1^{\ 2}+1\right)=x_1\left(x_2^{\ 2}+1\right)$

$\Rightarrow x_2x_1^{\ 2}+x_2=x_1x_2^{\ 2}+x_1\Rightarrow x_2x_1^{\ 2}-x_1x_2^{\ 2}+x_2-x_1=0$

$\Rightarrow x_2x_1\left(x_1-x_2\right)-\left(x_1-x_2\right)=0\Rightarrow\left(x_1-x_2\right)\left(x_2x_1-1\right)=0$

$\Rightarrow x_1-x_2=0 \ ou \ x_2x_1-1=0\Rightarrow x_1=x_2 \ ou \ x_2x_1=1\Rightarrow x_1=x_2 \ ou \ x_1=\dfrac{1}{x_2}$

$si:\ x_1=\dfrac{1}{x_2}$ Comme : $x_2\in[1;+\infty[\ \Rightarrow\ x_1=\dfrac{1}{x_2}\leq 1$

Et puisque : $x_1\geq 1$ Alors : $x_1=1$

Et par suite $x_2=1$ et donc : $x_1=x_2$

Dans tous les cas : $x_1 = x_2$

Donc f est injective

3) Montrons que f est surjective

Soit $y \in [2;+\infty[$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - xy + 1 = 0$$

$\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ car $y \geq 2$

Donc : au moins 2 solutions : $x = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ et $x = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

Puisque l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$ ($\forall y \in \mathbb{R}$)

C'est-à-dire : $\forall y \in [2;+\infty[; \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = y$

Conclusion : f est surjective

4) Puisque f est injective et surjective alors f est bijective

Soit $y \in [2;+\infty[$; $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - xy + 1 = 0$

$x_1 = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ et $x_2 = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

On a : $x_2 - 1 = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} - 1 = \frac{y-2-\sqrt{y^2-4}}{2} = \frac{y-2-\sqrt{(y-2)(y+2)}}{2}$

Comme : $y-2 \leq y+2 \quad \otimes y-2$

Alors : $(y-2)(y-2) \leq (y+2)(y-2)$

Alors : $(y-2)^2 \leq (y+2)(y-2)$

Alors : $\sqrt{(y-2)^2} \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$

Alors : $|y-2| \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$

Alors : $y-2 \leq \sqrt{(y+2)(y-2)}$ car $y \in [2;+\infty[$

Et donc : $x_2 - 1 \leq 0$ donc : $x_2 = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \notin y \in [1;+\infty[$

Alors : $x = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$

Donc : $\begin{array}{l} f^{-1} : [2;+\infty[\to [1;+\infty[\\ x \mapsto \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \end{array}$

Exercice13 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{array}$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

b) f est-elle injective ? justifier

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \leq \frac{1}{4}$

b) f est-elle surjective ? justifier

3) f est-elle bijective ?

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}\frac{(x-1)^2}{x^2}}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{x}\frac{(x-1)^2}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(1-x)^2}{x^2+1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 = \frac{x(1-x)^2}{(x^2+1)^2} = f(x)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

b) Si je trouve : $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

Si je prends : $x = 2$

On a : $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$

Donc : f n'est pas injective

2) a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} - f(x) = \frac{1}{4} - \frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x(1-x)^2}{4(1+x^2)^2} = \frac{x^4+2x^2+1-4x(x^2-2x+1)}{4(1+x^2)^2} = \frac{x^4-4x^3+8x^2-4x+2x^2+1}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^4-4x^3+10x^2-4x+1}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2\left(x^2-4x+10-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{4(1+x^2)^2} = \frac{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\right)}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+8\right)}{4(1+x^2)^2} = \frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\times 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2^2+4\right)}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2+4\right)}{4(1+x^2)^2} \geq 0$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \leq \frac{1}{4}$

b) Par exemple. 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x) = 1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

3) f n'est pas bijective

Exercice14 : Soit l'application $f: \begin{array}{l} \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ (n;m)\mapsto n\times m \end{array}$ et l'application $g: \begin{array}{l} \mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ n\mapsto \left(n;(n+1)^2\right) \end{array}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?
3) g est-elle injective ?
4) g est-elle surjective ?

Solution : 1)

• f est injective ssi tout élément de $\mathbb{N}$ admet au plus un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\forall(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m)=f(n';m')\Rightarrow(n;m)=(n';m')$

• f n'est pas injective si et seulement si il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui admet plus d'un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ C'est-à-dire : $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m)=f(n';m')$ et $(n;m)\neq(n';m')$

Si je trouve : $(n;m)\neq(n';m')$ et $f(n;m)=f(n';m')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Si je prends : $(1;2)$ et $(2;1)$

On a : $f(1;2)=1\times2=2$ et $f(2;1)=2\times1=2$

Donc : : $\exists(1;2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(2;1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(1;2)=f(2;1)$ Mais $(1;2)\neq(1;2)$

Donc : f n'est pas injective

2) f est surjective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall p\in\mathbb{N}$; $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $f(n;m)=p$

Soit : $p\in\mathbb{N}$

$f(n;m)=p\Leftrightarrow n\times m=p$

Il suffit de prendre : $n=p$ et $m=1$ car : $p\times1=p$

C'est-à-dire : $\forall p\in\mathbb{N}$; $\exists(p;1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; Tel que : $f(p;1)=p$

Donc : f est surjective.

3) $g: \begin{array}{l} \mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ n\mapsto \left(n;(n+1)^2\right) \end{array}$

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

$g(n)=g(m)\Rightarrow\left(n;(n+1)^2\right)=\left(m;(m+1)^2\right)$

$\Rightarrow n=m$ et $(n+1)^2=(m+1)^2\Rightarrow n^2-m^2-2(n-m)=0$

$\Rightarrow n=m$ et $n+1=m+1\Rightarrow n=m$ et $n=m\Rightarrow n=m$

Donc : g est injective

4)

• g n'est pas surjective ssi il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists(p;q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\forall n\in\mathbb{N}$; $g(n)\neq(p;q)$

• Si je trouve : $(p;q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$ on peut affirmer que g n'est pas surjective.

Si je prends : $(1;1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Supposons que : $(1;1)$ a un antécédent dans $\mathbb{N}$

On a : $g(n)=(1;1) \Leftrightarrow \left(n;(n+1)^2\right)=(1;1) \quad \Leftrightarrow n=1 \ et \ (n+1)^2=1 \Leftrightarrow n=1 \ et \ n+1=1$

$\Leftrightarrow n=1 \ et \ n=0$ absurde

Donc : g n'est pas surjective.

Remarque : il existe des éléments de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui ont des antécédents dans $\mathbb{N}$

Par exemple : $(1;4)$ Il existe : $1\in\mathbb{N}$ tel que : $g(n)=(1;4)$ Car : $\left(1;(1+1)^2\right)=(1;4)$

C'est-à-dire : $(1;4)$ a au moins un antécédent dans $\mathbb{N}$ (pas suffisant pour affirmer que g est surjective car il faut que tous les éléments de l'ensemble d'arrivé aient des antécédents par g.)

Exercice15 : Soit l'ensemble dans : $E=]0;+\infty[$

Et soit l'application f : $\begin{array}{l} E\times E \to E\times E \\ (x;y)\mapsto \left(x\times y \ ; \ \dfrac{y}{x}\right)\end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Solution : 1) Soit : $(x;y)$; $(x';y')\in E\times E$

Tel que : $f(x;y)=f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y)=(x';y')$??

$f(x;y)=f(x';y') \Leftrightarrow \left(x\times y \ ; \ \dfrac{y}{x}\right)=\left(x'\times y' \ ; \ \dfrac{y'}{x'}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\times y = x'\times y' \\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{y'}{x'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\times y = x'\times y' \\ yx' = y'x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\times y = x'\times y' \\ y=\dfrac{y'x}{x'} \end{cases} \Rightarrow x\times\dfrac{y'x}{x'} = x'\times y' \ et \ y=\dfrac{y'x}{x'}$

$\Rightarrow x^2 = x'^2 \ et \ y=\dfrac{y'x}{x'} \Rightarrow x=x' \ et \ y=\dfrac{y'x}{x'}$

Car $(x;y)$; $(x';y')\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[\quad \Rightarrow x=x' \ et \ y=y' \Rightarrow (x;y)=(x';y')$

Donc : f est injective

2) Soit : $(z;t)\in E\times E$; $\exists?(x;y)\in E\times E$

Tel que : $f(x;y)=(z;t)$??

$f(x;y)=(z;t) \Leftrightarrow \left(x\times y \ ; \ \dfrac{y}{x}\right)=(z;t) \Leftrightarrow x\times y = z \ et \ \dfrac{y}{x}=t \Leftrightarrow x\times y = z \ et \ y=tx$

$\Leftrightarrow x\times tx = z \ et \ y=tx \Leftrightarrow x^2=\dfrac{z}{t} \ et \ y=tx$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{z}{t}} \ et \ y=\sqrt{\dfrac{z}{t}}\,t \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{z}{t}} \ et \ y=\sqrt{zt}$

Donc : f surjective

3) Déterminons f^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$f(x;y)=(z;t)\Leftrightarrow(x;y)=f^{-1}(z;t)=\left(\sqrt{\frac{z}{t}};zt\right)$

Donc : $f^{-1}:\begin{array}{l} E\times E\to E\times E \\ (x;y)\ \mapsto\left(\sqrt{\frac{x}{y}};xy\right)\end{array}$

Exercice16 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{2x}{x^2+1}\end{array}$

1) a) Montrer que : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$

b) f est-elle surjective ? justifier

2) f est-elle injective ? justifier

2) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ et $f^{-1}(\{4\})$

3) Montrer que : f est une bijection de $[-1;1]$ vers$[-1;1]$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Solution : 1) a) Montrons que : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$

Soit $x\in\mathbb{R}$: Montrons que $-1\le\frac{2x}{x^2+1}\le1$

$1-f(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\ge0$

Donc : $\frac{2x}{x^2+1}\le1$

$f(x)-(-1)=\frac{2x}{x^2+1}+1=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\ge0$ Donc : $-1\le\frac{2x}{x^2+1}$ Par suite : $-1\le\frac{2x}{x^2+1}\le1$

Conclusion : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$

b) Par exemple :2 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ en effet : $f(\mathbb{R})\subset[-1;1]$ et $2\notin[-1;1]$

Donc : f n'est pas surjective

2) f est-elle injective ? justifier

Démarche1 : Si je trouve : $x_1\ne x_2$ et $f(x_1)=f(x_2)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $f(2)=\frac{2\times2}{2^2+1}=\frac{4}{5}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{5}$

On a : donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)$ mais $\frac{1}{2}\ne2$

Donc : f n'est pas injective

Démarche2 : Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{2x_1}{x_1^{\,2}+1}=\frac{2x_2}{x_2^{\,2}+1}\Rightarrow2x_1\times(x_2^{\,2}+1)=2x_2\times(x_1^{\,2}+1)\Rightarrow x_1\times x_2^{\,2}+x_1=x_2\times x_1^{\,2}+x_2$

$\Rightarrow x_1\times x_2^{\,2}-x_2\times x_1^{\,2}+x_1-x_2=0\Rightarrow x_1x_2\times(x_2-x_1)-(x_2-x_1)=0$

$\Rightarrow(x_2-x_1)(x_1x_2-1)=0\Rightarrow x_2-x_1=0\ ou\ x_1x_2-1=0\Rightarrow x_2=x_1\ ou\ \boxed{x_1x_2=1}$

Pour : $\frac{1}{2} \neq 2$ on a ; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$

Donc : f n'est pas injective

3) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$: Soit : $y \in [-1;1]$; Montrons que : $\exists! x \in [-1;1]$ tel que : $f(x) = y$?

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow x^2y - 2x + y = 0$; $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2) \geq 0$ car : $-1 \leq y \leq 1$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

Si : $y = 0$ alors : $x^2y - 2x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 \times 0 - 2x + 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Alors l'équation admet une solution unique : $x = 0$

Si : $y = 1$ alors : $\Delta = 0$ Alors l'équation admet une solution unique : $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} = 1$

Si : $y = -1$ alors : $\Delta = 0$ Alors l'équation admet une solution unique : $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} = -1$

Si : $y \notin \{-1;0;1\}$ alors : $x_1 = \frac{2+\sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{2+2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x_2 = \frac{2-\sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$

Montrons que : $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1;1]$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1;1]$

On a : $|y| \prec 1$ donc : $1 \prec \frac{1}{|y|}$ et on a : $1 \leq 1 + \sqrt{1-y^2}$

Donc : $1 \prec \frac{\left|1+\sqrt{1-y^2}\right|}{|y|}$ cad $1 \prec \left|\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right|$

Donc : $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1;1]$ On montre aussi que : $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1;1]$

$\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in [-1;1] \end{cases}$$

$$f^{-1} : [-1;1] \to [-1;1]$$

Donc : $\forall x \in [-1;1]$; $x \mapsto \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f^{-1}(0) = 0 \end{cases}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien