1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°2 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180}=\{n\in\mathbb{N}/n/180\}$

$A=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{-5}{2}\leq n^2\leq\frac{3}{2}\right\}$; $B=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

3)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Exercice2 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $E=\left\{k\in\mathbb{Z}/|k-1|\leq\frac{5}{3}\right\}$

2) $F=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{n+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $G=\left\{n\in\mathbb{N}/\frac{3n+2}{n-1}\in\mathbb{Z}\right\}$

4) $H=\{(n;m)\in\mathbb{N}^2/n+2m=11\}$

Exercice3 : Montrer que : $\{x\in\mathbb{R}/|2x|+|x-5|\leq3\}\subset\{x\in\mathbb{R}/|3x-5|\leq3\}$

Exercice4 : Montrons que : $\left\{k\in\mathbb{Z}/\frac{2k}{|k|+1}\in\mathbb{Z}\right\}=\{-1;0;1\}$

Exercice5 : Donner Le complémentaire des ensembles suivants :

1)l'ensemble $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle $[a;b[$ $a\prec b$

Exercice6 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A\cup B=A\cup C$ *et* $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow B=C$

Solution : On procède par double implication :

- Montrons que : $A\cup B=A\cup C$ *et* $A\cap B=A\cap C\Rightarrow B=C$

On suppose que (A∪B) = (A∪C) et (A∩B) = (A∩C).

Soit x∈B, donc : x∈(A∪B) et donc x∈A∪C

⇔ x∈A ou x∈C.

Si x∈A alors x∈A∩B = A∩C et donc x∈C.

Sinon, x∈C. Bilan : Si x∈B alors x∈C et donc B ⊂ C. ↔ Soit x∈C, on x∈(A∪C) et donc x∈A∪B ⇔ x∈A ou x∈B. Si x∈A alors x∈A∩C = A∩B et donc x∈B.

Sinon, x∈B. Bilan : Si x∈C alors x∈B et donc C ⊂ B.

On pourrait dire : on montre de même que C ⊂ B, en échangeant les rôles de B et de C

Conclusion : B = C

- La réciproque est évidente.

Exercice7 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E ; Monter que :

1) $A\setminus(B\setminus C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

2) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

3) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

Solution:1) Methode1:

$A\setminus(B\setminus C)=A\cap\left(\overline{B\setminus C}\right)=A\cap\left(\overline{B\cap\overline{C}}\right)=A\cap\left(\overline{B}\cup C\right)$ car $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{\overline{A}}=A$

$=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

Methode2: a) Montrons que : $A\setminus(B\setminus C)\subset(A\cap C)\cup(A\setminus B)$?

Soit : $x\in A\setminus(B\setminus C)\Rightarrow x\in A \quad et \ x\notin B\setminus C$

• Si $x\in C$ alors $x\in A\cap C$

$\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

• Si $x\notin C$ alors $x\notin B$ car sinon : $x\in B$ et $x\notin C$
Alors : $\Rightarrow x\in B\setminus C$ contradiction

Donc : On a : $x\in A \quad et \ x\notin B\Rightarrow x\in A\setminus B$

$\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

Dans tous les cas : $x\in(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

Donc : $A\setminus(B\setminus C)\subset(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

b) Montrons que : $(A\cap C)\cup(A\setminus B)\subset A\setminus(B\setminus C)$?

Montrons que : $A\cap C\subset A\setminus(B\setminus C)$ ①

Soit : $x\in A\cap C\Rightarrow x\in A \quad et \ x\in C \quad \Rightarrow x\in B\setminus C$

$\Rightarrow x\notin B\setminus C\Rightarrow x\in A\setminus(B\setminus C)$

Donc : $A\cap C\subset A\setminus(B\setminus C)$

Montrons que : $A\setminus B\subset A\setminus(B\setminus C)$ ②

Soit : $x\in A\setminus B\Rightarrow x\in A \quad et \ x\notin B \quad \Rightarrow x\notin B\setminus C$

$\Rightarrow x\notin B\setminus C\Rightarrow x\in A\setminus(B\setminus C)$

Donc : $A\setminus B\subset A\setminus(B\setminus C)$

① et ②$\Rightarrow(A\cap C)\cup(A\setminus B)\subset A\setminus(B\setminus C)$

Finalement : $A\setminus(B\setminus C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

2) Montrons que : $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

$A\setminus(B\cap C)=A\cap\left(\overline{B\cap C}\right)=A\cap\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)$

$=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap\overline{C}\right)$(Loi de Morgan)

$=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

3) Montrons que : $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

a) Montrons que : $(A\setminus B)\cap C\subset(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

Soit : $x\in(A\setminus B)\cap C\Rightarrow x\in A\setminus B \ \ et \ x\in C$

$\Rightarrow(x\in A \ et \ x\notin B)\, et \ x\in C\Rightarrow(x\in A \ et \ x\in C)\ et\,(x\in A \ et\, x\notin B)$

$\Rightarrow(x\in A\cap C)\ et\,(x\notin A\cap B)\Rightarrow x\in(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

D'où : : $(A\setminus B)\cap C\subset(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

b) Montrons que : $(A\cap C)\setminus(A\cap B)\subset(A\setminus B)\cap C$

Soit : $x\in(A\cap C)\setminus(A\cap B)\Rightarrow(x\in A\cap C)\ et\ (x\notin A\cap B)$

$\Rightarrow(x\in A\ et\ x\in C)\ et\ (x\notin A\ ou\ x\notin B)$

$\Rightarrow(x\in A\ et\ x\in C\ et\ x\notin A)\ ou\ (x\in A\ et\ x\in C\ et\ x\notin B)$

$\Rightarrow(x\in\varnothing)\ ou\ (x\in A\ et\ x\notin B\ et\ x\in C)\Rightarrow((x\in A\ et\ x\notin B)\ et\ x\in C)$

$\Rightarrow(x\in A-B)\ et\ (x\in C)\Rightarrow x\in(A\setminus B)\cap C$

D'où : : $(A\cap C)\setminus(A\cap B)\subset(A\setminus B)\cap C$

Conclusion : $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

Exercice8 : Soient A ; B ; C des parties d'un Ensemble E ; Monter que :

1) $A=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{C})$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

3) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Solution :1) $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$

$=[(A\cap B)\cap(C\cup\overline{C})]\cup[(A\cap\overline{B})\cap(C\cup\overline{C})]$

$=[(A\cap B)\cap E]\cup[(A\cap\overline{B})\cap E]=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap E=A$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=[B\cup(A\cap C)]\cap(C\cup A)$

$=(B\cap(C\cup A))\cup((A\cap C)\cap(C\cup A))=(B\cap C)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)$

3) Montrons que : $\begin{cases}A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow A\cap B=A\cap C\\ A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\end{cases}$

$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A\cap\overline{C}}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{C}}$

$\Rightarrow\overline{A}\cup B=\overline{A}\cup C\Rightarrow A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap(\overline{A}\cup C)$

$\Rightarrow(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap C)\Rightarrow A\cap B=A\cap C$

Inversement : $A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{\overline{B}}=A\cap\overline{\overline{C}}\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

D'après l'implication directe

Donc : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Exercice9 : Soient A ; B ; C trois parties d'un ensemble $E=\{a;b;c;d;e\}$ telles que :

$A\cup B=\{b;c;d;e\}$; $A\cap B=\{b;d\}$; $A\cap C=\{b;c\}$ et $A\cup C=\{a;b;c;d\}$

1) Déterminer : A ; B ; C

2) Déterminer : $A\cup(B\cap C)$; $A\cap(B\cup C)$; $\overline{A\cup B}$ et $\overline{A\cap B}$

3) Déterminer : $A\Delta B$; $B\Delta C$ et $C\Delta A$

Et vérifier que : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

Solution :1) $A=\{b;c;d\}$; $B=\{b;d;e\}$; $C=\{a;b;c\}$

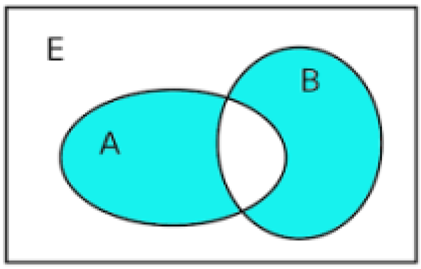
2) $B\cap C=\{b\}$ et $A\cup(B\cap C)=\{b;c;d\}$

$A\cap(B\cup C)=\{b;c;d\}$;

$\overline{A\cup B}=\{a\}$; $\overline{A\cap B}=\{a;c;e\}$

3) $A\Delta B==(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$A\Delta B=\{c;e\}$ et $B\Delta C=\{a;c;d;e\}$



$C\Delta A=\{a;d\}$

$(A\Delta B)\Delta C=\{c;e\}\Delta\{a;b;c\}=\{a;b;e\}$

$A\Delta(B\Delta C)=\{b;c;d\}\Delta\{a;c;d;e\}=\{a;b;e\}$

Donc : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

Exercice10 : Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{6n-2}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{3n+1}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{1}{12}\in B$ et $\frac{1}{12}\notin A$

2) Montrer que : $A\subset B$

3) Est-ce qu'on a : $A=B$?

Solution :1) a) Montrons que : $\frac{1}{12}\in B$

$\frac{1}{12}\in B \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\frac{1}{12}=\frac{3n+1}{12} \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/3n+1=1$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/3n=0 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=0\in\mathbb{Z}}$

Il suffit de prendre : $n=0$

On peut vérifier que : $\frac{3n+1}{12}=\frac{3\times 0+1}{12}=\frac{1}{12}$

Par suite : $\frac{1}{12}\in B$

b) Montrons que : $\frac{1}{12}\notin A$

Supposons par l'absurde que : $\frac{1}{12}\in A$

$\frac{1}{12}\in B \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\frac{1}{12}=\frac{6n-2}{12}$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/6n-2=1$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/6n=3 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}}$

Contradiction : Donc : $\frac{1}{12}\notin A$

2) Montrons que : $A\subset B$

Soit : $r\in A$ Montrons que : $r\in B$?

$r\in A \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/r=\frac{6n-2}{12}$

Pour montrer que : $r\in B$ Il suffit de trouver un : $n'\in\mathbb{Z}$ tel que : $r=\frac{3n'+1}{12}$

1ier méthode : $r=\frac{3n'+1}{12}$ et $r=\frac{6n-2}{12}$

Donc : $\frac{3n'+1}{12}=\frac{6n-2}{12}$

Donc : $3n'+1=6n-2 \Leftrightarrow 3n'=6n-3 \Leftrightarrow n'=2n-1\in\mathbb{Z}$

Donc : Il suffit de prendre : $n'=2n-1\in\mathbb{Z}$

Par suite : $r\in B$

Conclusion : $A\subset B$

2ier méthode : Pour montrer que : $r\in B$ Il suffit de trouver un : $n'\in\mathbb{Z}$ tel que : $r=\frac{3n'+1}{12}$

$r\in A \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z} / r=\frac{6n-2}{12}$

$r=\frac{6n-2}{12}=\frac{3\times 2n-2}{12}=\frac{3\times 2n-3+3-2}{12}$

$r=\frac{3\times(2n-1)+1}{12}=\frac{3\times n'+1}{12}$

Avec : $n'=2n-1\in\mathbb{Z}$ car $n\in\mathbb{Z}$

Donc : $\exists n'\in\mathbb{Z} / r=\frac{3n'+1}{12}$; Par suite : $r\in B$

Conclusion : $A\subset B$

3) Comme : $\frac{1}{12}\in B$ et $\frac{1}{12}\notin A$ alors : $B\not\subset A$

Par suite : $A\neq B$

Exercice11 : Soit l'ensemble : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+xy-2y^2+5=0\right\}$

1) a) Vérifier que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E\cap\mathbb{Z}^2$

c) Montrer que : $E=\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right) / t\in\mathbb{R}^*\right\}$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants : $A=\{0;1;4;9;16;...\}$ et $B=\left\{-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$

$C=\{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

Solution : 1) a) $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : (x-y)(x+2y)=x^2+2xy-xy-2y^2=x^2+xy-2y^2$

b) $(x;y)\in E\cap\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x;y)\in E$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=-5$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow (x;y)\in\mathbb{Z}^2\begin{cases}x-y=-5\\x+2y=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=5\\x+2y=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=-1\\x+2y=5\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=1\\x+2y=-5\end{cases}$

Donc : $E\cap\mathbb{Z}^2=\{(-3;2);(3;-2);(1;2);(-1;-2)\}$

c) $(x;y)\in E \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=-5 \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=t\\x+2y=\frac{-5}{t}\end{cases}$: $t\in\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \left(x=\frac{2t^2-5}{3t} et y=\frac{-t^2-5}{3t}\right)$: $t\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right) / t\in\mathbb{R}^*\right\}$

Donc : $E=\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right) / t\in\mathbb{R}^*\right\}$

2) $A=\left\{k^2;k\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{\frac{(-1)^k}{k};k\in\mathbb{N}^*\right\}$; $C=\left\{1+3n;n\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice12 : Soit E un ensemble et G et H deux parties de E

On note : $\mathcal{P}(G)$: l'ensemble des parties de l'ensemble G

1) Montrer que : $\mathcal{P}(G\cap H)=\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

2) Montrer que : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cup H)$

3) Montrer que : on général on n'a pas : $\mathcal{P}(G\cup H)=\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)$

Solution : Remarque : $X\subset E\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(E)$

1) $X\in\mathcal{P}(G\cap H)\Leftrightarrow X\subset G\cap H$

$\Leftrightarrow X\subset G$ et $X\subset H$

$\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(G)$ et $X\in\mathcal{P}(H)$

$\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

Par suite : $\mathcal{P}(G\cap H)=\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

2) On a : $G\subset G\cup H$ et $H\subset G\cup H$

Donc : $\mathcal{P}(G)\subset\mathcal{P}(G\cap H)$ et $\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cap H)$

Donc : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cup H)$

3) $H=\{2\}$ et $G=\{1\}$

On a : $H\cup G=\{1;2\}$

$\mathcal{P}(G\cup H)=\left\{\varnothing;\{1\};\{2\};\{1;2\}\right\}$

$\mathcal{P}(G)=\left\{\varnothing;\{1\}\right\}$ et $\mathcal{P}(H)=\left\{\varnothing;\{2\}\right\}$

$\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)=\left\{\varnothing;\{1\};\{2\}\right\}$

Donc : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\neq\mathcal{P}(G\cup H)$

Exercice13 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\frac{3x-1}{x+1}\end{array}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ $f(x)=3-\frac{4}{x+1}$

2) Déterminer : $f(K)$ avec $K=\left]-\infty;-1\right[$

Solution : 1) $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $3-\frac{4}{x+1}=\frac{3x+3-4}{x+1}=\frac{3x-1}{x+1}=f(x)$

2) $x\in K\Leftrightarrow x\prec -1\Leftrightarrow x+1\prec 0\Leftrightarrow -\frac{4}{x+1}\succ 0$

$\Leftrightarrow 3-\frac{4}{x+1}\succ 3\Leftrightarrow g(x)\in\left]3;+\infty\right[$ Donc $f(K)=\left]3;+\infty\right[$

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2\end{array}$ et $A=[-1;4]$

Déterminer :

1) L'image directe de A par f.

2) L'image réciproque de A par f.

Solution : 1) On a : $f(A)=f([-1;4])=\{f(x)\in\mathbb{R}/-1\le x\le 4\}$

Or : $A=[-1;4]=[-1;0]\cup[0;4]$

Alors : $f([-1;4])=f([-1;0])\cup f([0;4])$

Il est clair que : $-1\le x\le 0\Rightarrow 0\le x^2\le 1$ et $0\le x\le 4\Rightarrow 0\le x^2\le 16$

Ainsi : $f([-1;4])=[0;1]\cup[0;16]=[0;16]$

2) $f^{-1}([-1;4])=f^{-1}([-1;0])\cup f^{-1}([0;4])$ Or : $f^{-1}([-1;0])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[-1;0]\}$

$f^{-1}([-1;0])=\{x\in\mathbb{R}/-1\le f(x)\le 0\}=\{0\}$ et $f^{-1}([0;4])=\{x\in\mathbb{R}/0\le f(x)\le 4\}$

$0\le f(x)\le 4\Leftrightarrow 0\le x^2\le 4\Leftrightarrow\sqrt{0}\le\sqrt{x^2}\le\sqrt{4}\Leftrightarrow 0\le|x|\le 2$

Ainsi : $f^{-1}([0;4])=[-2;2]$

D'où : $f^{-1}([-1;4])=\{0\}\cup[-2;2]=[-2;2]$

Exercice15 : Soit l'application $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sin x\end{array}$ et Considérons les ensembles :

$A=[0;2\pi]$; $B=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$; $C=\mathbb{R}$

Déterminer :

1) L'image directe des ensembles : A ; B et C par f.

2) L'image réciproque des ensembles : $A'=[0;1]$; $B'=[3;4]$ et $C'=[1;2]$ par f.

Solution : 1) On a : $f(A)=f([0;2\pi])=\{f(x)\in\mathbb{R}/0\le x\le 2\pi\}=[-1;1]$

$f(B)=f\left(\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\right)=\left\{f(x)\in\mathbb{R}/0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right\}=[0;1]$

$f(C)=f(\mathbb{R})=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}=[-1;1]$

2) $f^{-1}([0;1])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[0;1]\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi;2k\pi+\pi]$

$f^{-1}([3;4])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[3;4]\}=\varnothing$

$f^{-1}([1;2])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[1;2]\}=\{x\in\mathbb{R}/\sin(x)=1\}=\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto x+\sqrt{x}\end{array}$

f est-elle injective ?

Solution : Soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\sqrt{x_1}=x_2+\sqrt{x_2}$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1\right)=0\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$ ou $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1=0$

Or $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1\ne 0\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$

$\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

Donc f est injective

Exercice17: Soit l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}^+\to\left]-\infty;3\right]\\ x\mapsto 3-x^2\end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $\left]-\infty;3\right]$.

Solution : Soient $y \in]-\infty;3]$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow 3 - x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = 3 - y$ Or $y \in]-\infty;3]$ donc $y \leq 3$ c'est-à-dire : $0 \leq 3 - y$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3-y}$ Car $x \in \mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall \boldsymbol{y} \in]-\infty;3])(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Exercice18 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$

f Est-elle injective ?

Solution : On a : $f(1) = f(2) = 0$ mais $1 \neq 2$

Ceci signifie que l'application f n'est donc pas injective.

Exercice19 : Soit l'application f : $\begin{aligned} :\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?

Solution : Si je trouve : $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = y^2 + 2y - 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) + 2(x-y) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+2) = 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0 \quad ou \quad x + y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = y \quad ou \quad \boxed{x + y = -2}$

Si je prends : $x = -3$ et $y = 1$ alors : $\boxed{x + y = -2}$

On a : $f(1) = f(-3) = 0$ mais $1 \neq -3$

En effet : $f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0$ et $f(1) = 1^2 + 2 - 3 = 0$

Donc : f n'est pas injective

<u>Remarque :</u> on peut répondre directement comme suit : $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$

$f(x) = -3 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \ ou \ x = 0$

$f(x) = -3 \Leftrightarrow x = -2 \ ou \ x = 0$

On a : $f(0) = f(-2) = 0$ mais $0 \neq -2$

Donc : f n'est pas injective.

2) $f(x) = x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x+1)^2 - 4$

Donc : $f(x) - (-4) = (x+1)^2 \geq 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq -4$

Par exemple : -5 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x) = -5$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

Exercice20 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to]0;1] \\ x\mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+2} \end{array}$

Montrer que f est surjective

Solution : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$

Soient $y\in]0;1]$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$

$f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-2x+2}=y \Leftrightarrow 1=y\left(x^2-2x+2\right)$

or $x^2-2x+2\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ car $\Delta \prec 0$

$\Leftrightarrow yx^2-2xy+2y-1=0$

Le discriminant de l'équation est :

$\Delta=(-2y)^2-4y\times(2y-1)=4y(1-y)$

Comme : $0\prec y\leq 1$ alors : $1-y\geq 0$ et donc : $\Delta\geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions dans $\mathbb{R}$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.

Exercice21 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+x+2 \end{array}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1-x)=f(x)$

2) f est-elle injective ?

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=-\dfrac{1}{4}$

4) f est-elle surjective ?

5) Montrer que : $f(\mathbb{R})=\left[\dfrac{7}{4};+\infty\right[$

Solution : 1) Montrons que : $f(-1-x)=f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$:

$f(-1-x)=(-1-x)^2+(-1-x)+2$

$\qquad\qquad =(1+x)^2+-1-x+2=x^2+2x+1+-1-x+2$

$\qquad\qquad =x^2+x+2=f(x)$

2)Si je trouve : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1-x)=f(x)$

Si je prends : $x=0$

On a : $f(-1)=f(0)$ mais $0\neq -1$

Donc : f n'est pas injective

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=1$

$f(x)=1 \Leftrightarrow x^2+x+2=1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3\prec 0$

Donc : $S=\varnothing$

4)Par exemple : 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

5) Montrons que : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

On raisonne par double inclusion :

a) Montrons que : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ Montrons que : $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

C'est-à-dire Montrons que : $\frac{7}{4}\leq f(x)$

$f(x)-\frac{7}{4}=x^2+x+2-\frac{7}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$

$\Delta=1^2-4\times\frac{1}{4}\times1=0$ Donc : $x^2+x+\frac{1}{4}\geq0$

Donc : $f(x)-\frac{7}{4}\geq0$ C'est-à-dire $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Alors : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

a) Inversement montrons que : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Soit : $y\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Montrons que : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$?

$f(x)=y\Leftrightarrow x^2+x+2=y\Leftrightarrow x^2+x+2-y=0$

$\Delta=1^2-4\times(2-y)=-7+4y$

Comme : $\frac{7}{4}\leq y$ alors : $-7+4y\geq0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$x=\frac{-1+\sqrt{-7+4y}}{2}\in\mathbb{R}$ ou $x=\frac{-1-\sqrt{-7+4y}}{2}\in\mathbb{R}$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Donc : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Conclusion : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Exercice22 : Soit l'application f : $\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\rightarrow\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

$x\mapsto f(x)=\frac{5}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$: Résolvons dans : $\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ l'équation $f(x)=y$

Soit : $x\in\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$: $f(x)=y\Leftrightarrow\frac{5}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=y\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{1}{4}}=y-\frac{5}{2}$

$x+\frac{1}{4}\geq 0$ car $x\in\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ et $y-\frac{5}{2}\geq 0$ car $y\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

$f(x)=y\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2\Leftrightarrow x=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ Et on a : $\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $x\in\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$

Donc : $\forall y\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\ \exists! x\in\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ tel que : $f(x)=y$

Donc : f est bijective.

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=f^{-1}(y)=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \\ y\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

Donc : $\forall x\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$; $f^{-1}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$f^{-1}:\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\to\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$

$x\mapsto f^{-1}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

Exercice23 : Soit l'application f : $\begin{matrix}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x;y)\mapsto(x+y\ ;\ x-y)\end{matrix}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Solution : 1) Soit : $(x;y)$; $(x';y')\in\mathbb{R}^2$

Tel que : $f(x;y)=f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y)=(x';y')$??

$f(x;y)=f(x';y')\Leftrightarrow(x+y\ ;\ x-y)=(x'+y'\ ;\ x'-y')$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=x'+y' & (1) \\ x-y=x'-y' & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)\ \Rightarrow 2x=2x'\Rightarrow x=x'$

$x+y=x'+y'\quad(1)\quad\Rightarrow x+y=x+y'=0\Rightarrow y=y'$

$\Rightarrow x=x'$ et $y=y'\Rightarrow(x;y)=(x';y')$

Donc : f est injective

2) Soit : $(z;t)\in E\times E$; $\exists?(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $f(x;y)=(z;t)$??

$$f(x;y)=(z;t)\Leftrightarrow(x+y\ ;\ x-y)=(z;t)\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=z & (1) \\ x-y=t & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$ et $(1)-(2)$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x & = z+t \\ 2y & = z-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = \dfrac{z+t}{2} \\ y & = \dfrac{z-t}{2} \end{cases}$ Donc : f surjective

3) Déterminons f^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$f(x;y)=(z;t) \Leftrightarrow (x;y)=f^{-1}(z;t)=\left(\dfrac{z+t}{2};\dfrac{z-t}{2}\right)$

Donc : f^{-1} : $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2};\dfrac{x-y}{2}\right) \end{matrix}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien