1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°2 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180}=\{n\in\mathbb{N}/n/180\}$

$A=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{-5}{2}\le n^2\le\frac{3}{2}\right\}$; $B=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

3)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Solution : 1) $180=2^2\times3^2\times5$

$D_{180}=\{1;2;3;4;5;6;9;10;12;15;18;20;30;36;45;60;90;180\}$

$A=\{-1;0;1\}$

$x^2+x+1=0\quad \Delta=-3\prec 0$ Donc : $B=\varnothing$

2) $P=\{2k/k\in\mathbb{N}\}$

3) $C=\{5k/k\in\mathbb{N}\}$

Exercice2 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $E=\left\{k\in\mathbb{Z}/|k-1|\le\frac{5}{3}\right\}$

2) $F=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{n+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $G=\left\{n\in\mathbb{N}/\frac{3n+2}{n-1}\in\mathbb{Z}\right\}$

4) $H=\{(n;m)\in\mathbb{N}^2/n+2m=11\}$

Solution : : $k\in E\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $|k-1|\le\frac{5}{3}\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{3}\le k-1\le\frac{5}{3}\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{3}+1\le k\le\frac{5}{3}+1\Leftrightarrow-\frac{2}{3}\le k\le\frac{8}{3}\Leftrightarrow k\in\{0;1;2\}$

Donc : $E=\{0;1;2\}$

2) $F=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{n+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Soit : $n\in\mathbb{Z}$: $n\in F\Leftrightarrow n\in\mathbb{Z}\ et\ \frac{n+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2\times\frac{n+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{2n+2}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{2n+1+1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 1+\frac{1}{2n+1}\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\frac{1}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2n+1/1\Rightarrow 2n+1\in\{-1;1\}$

$\Rightarrow 2n+1=-1\quad ou\quad 2n+1=1\ \Rightarrow 2n=-2\quad ou\quad 2n=0\Rightarrow n=-1\quad ou\quad n=0\ \Rightarrow n\in\{-1;0\}$

Donc : $F\subset\{-1;0\}$

Montrons que : $\{-1;0\}\subset F$

On a : $0\in F$ car : $0\in\mathbb{Z}\ et\ \frac{0+1}{2\times0+1}=1\in\mathbb{Z}$

Et aussi on a : $-1 \in F$ car : $-1 \in \mathbb{Z}$ et $\frac{-1+1}{2\times(-1)+1} = \frac{0}{-1} = 0 \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $F = \{-1;0\}$ l'extension de F

3) $G = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{3n+2}{n-1} \in \mathbb{Z} \right\}$

Soit : $n \in \mathbb{N}$: $\frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+3+2}{n-1} = \frac{3(n-1)}{n-1} + \frac{5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$

$$n \in G \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \quad et \quad 3 + \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow n \in \mathbb{N} \quad et \quad \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n \in \mathbb{N} \quad et \quad \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \mathbb{N} \quad et \quad n-1/5$$

$$\Rightarrow n \in \mathbb{N} \quad et \quad n-1 \in \{-1;1;-5;5\}$$

$$\Rightarrow n \in \mathbb{N} \quad et \quad n \in \{0;2;6\}$$

Donc : $G \subset \{0;2;6\}$

Montrons que : $\{0;2;6\} \subset G$

On a : $0 \in G$ car : $0 \in \mathbb{N}$ et $\frac{3\times 0+2}{0-1} = -2 \in \mathbb{Z}$

Et aussi on a : $2 \in G$ car : $2 \in \mathbb{N}$ et $\frac{3\times 2+2}{2-1} = 8 \in \mathbb{Z}$

Et aussi on a : $6 \in G$ car : $6 \in \mathbb{N}$ et $\frac{3\times 6+2}{6-1} = 4 \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $G = \{0;2;6\}$ l'extension de G

4) $H = \left\{ (n;m) \in \mathbb{N}^2 / n+2m = 11 \right\}$

Soit : $(n;m) \in \mathbb{N}^2$

$$(n;m) \in H \Leftrightarrow (n;m) \in \mathbb{N}^2 \quad et \quad n+2m = 11$$

$$\Leftrightarrow (n;m) \in \mathbb{N}^2 \quad et \quad 2m = 11-n$$

$$\Leftrightarrow (n;m) \in \mathbb{N}^2 \quad et \quad 2m \in \{0;2;4;6;8;10\}$$

$2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Leftrightarrow n = 11$
$2m = 2 \Leftrightarrow m = 1 \Leftrightarrow n = 9$
$2m = 4 \Leftrightarrow m = 2 \Leftrightarrow n = 7$
$2m = 6 \Leftrightarrow m = 3 \Leftrightarrow n = 5$
$2m = 8 \Leftrightarrow m = 4 \Leftrightarrow n = 3$
$2m = 10 \Leftrightarrow m = 5 \Leftrightarrow n = 1$

Donc : $H = \{(11;0);(9;1);(7;2);(5;3);(3;4);(1;5)\}$

Exercice3 : Montrer que : $\{x \in \mathbb{R} / |2x| + |x-5| \leq 3\} \subset \{x \in \mathbb{R} / |3x-5| \leq 3\}$

Solution : On pose : $A = \{x \in \mathbb{R} / |2x| + |x-5| \leq 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / |3x-5| \leq 3\}$

Montrons donc que : $A \subset B$?

Conseils méthodologiques : Pour montrer que E ⊂ F ou que E = F)

- Pour montrer que E ⊂ F : on considère un élément quelconque de E et on montre qu'il est aussi élément de F
- Pour montrer que E = F : On montre que :E ⊂ F et que F ⊂ E .

Soit $x \in \mathbb{R}$:

Supposons que : $x \in A$ et Montrons que : $x \in B$

$x \in A \Rightarrow |2x| + |x-5| \leq 3$

Or on sait que : $|a+b| \leq |a| + |b|$

Donc : $|2x + x - 5| \leq |2x| + |x-5| \ \leq 3 \Rightarrow |2x + x - 5| \leq 3 \Rightarrow |3x - 5| \leq 3 \Rightarrow x \in B$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \ : x \in A \Rightarrow x \in B$

Par suite : $A \subset B$

Exercice4 : Montrons que : $\left\{ k \in \mathbb{Z} / \dfrac{2k}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \right\} = \{-1;0;1\}$

Solution : On pose : $A = \left\{ k \in \mathbb{Z} / \dfrac{2k}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \right\}$

Soit $k \in \mathbb{Z}$; $\quad k \in A \Leftrightarrow \dfrac{2k}{|k|+1} \in \mathbb{Z}$

En effet : $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |k| \in \mathbb{Z}$ est vraie (dans $\mathbb{N}$ faux)

$k \in A \Leftrightarrow \dfrac{|2k|}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{2|k|}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{2|k|+2-2}{|k|+1} \in \mathbb{Z}$

$k \in A \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow 2 - \dfrac{2}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{2}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |k|+1 \big/ 2 \ \Leftrightarrow |k|+1 \in \{1;2\} \Leftrightarrow |k|+1 = 1 \ \ ou \ \ |k|+1 = 2$

$k \in A \Leftrightarrow |k| = 0 \ \ ou \ \ |k| = 1$

$k \in A \Leftrightarrow k = 0 \ \ ou \ \ k = -1 \ ou \ \ k = 1$

Donc on a : $k \in A \Leftrightarrow k \in \{-1;0;1\}$

Donc : $\left\{ k \in \mathbb{Z} / \dfrac{2k}{|k|+1} \in \mathbb{Z} \right\} = \{-1;0;1\}$

Exercice5 : Donner Le complémentaire des ensembles suivants :

1)l'ensemble $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle $[a;b[\ \ a \prec b$

Solution : 1) Le complémentaire de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels et se note $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

2) $\overline{[a;b[} = \{x \in \mathbb{R} / x \notin [a;b[\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b ou x \prec a\}$

$\overline{[a;b[} =]-\infty;a[\cup [b;+\infty[$

Exercice6 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A \cup B = A \cup C \ \ et \ \ A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow B = C$

Solution : On procède par double implication :

- Montrons que : $A \cup B = A \cup C \ \ et \ \ A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

On suppose que (A∪B) = (A∪C) et (A∩B) = (A∩C).

Soit x∈B, donc : x∈(A∪B) et donc x∈A∪C

⇔ x∈A ou x∈C.

Si x∈A alors x∈A∩B = A∩C et donc x∈C.

Sinon, x∈C. Bilan : Si x∈B alors x∈C et donc B ⊂ C. ↔ Soit x∈C, on x∈(A∪C) et donc x∈A∪B ⇔ x∈A ou x∈B. Si x∈A alors x∈A∩C = A∩B et donc x∈B.

Sinon, x∈B. Bilan : Si x∈C alors x∈B et donc C ⊂ B.

On pourrait dire : on montre de même que C ⊂ B, en échangeant les rôles de B et de C

Conclusion : B = C

- La réciproque est évidente.

Exercice7 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E ; Monter que :

1) $A\setminus(B\setminus C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

2) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

3) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

Solution:1) Methode1:

$A\setminus(B\setminus C)=A\cap\left(\overline{B\setminus C}\right)=A\cap\left(\overline{B\cap\overline{C}}\right)=A\cap\left(\overline{B}\cup C\right)$ car $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{\overline{A}}=A$

$=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

Methode2: a) Montrons que : $A\setminus(B\setminus C)\subset(A\cap C)\cup(A\setminus B)$?

Soit : $x\in A\setminus(B\setminus C)\Rightarrow x\in A \quad et \quad x\notin B\setminus C$

- Si $x\in C$ alors $x\in A\cap C$

$\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

- Si $x\notin C$ alors $x\notin B$ car sinon : $x\in B$ et $x\notin C$

Alors : $\Rightarrow x\in B\setminus C$ contradiction

Donc : On a : $x\in A \quad et \quad x\notin B\Rightarrow x\in A\setminus B$

$\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

Dans tous les cas : $x\in(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

Donc : $A\setminus(B\setminus C)\subset(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

b) Montrons que : $(A\cap C)\cup(A\setminus B)\subset A\setminus(B\setminus C)$?

Montrons que : $A\cap C\subset A\setminus(B\setminus C)$ ①

Soit : $x\in A\cap C\Rightarrow x\in A \quad et \quad x\in C \quad\Rightarrow x\in B\setminus C$

$\Rightarrow x\notin B\setminus C\Rightarrow x\in A\setminus(B\setminus C)$

Donc : $A\cap C\subset A\setminus(B\setminus C)$

Montrons que : $A\setminus B\subset A\setminus(B\setminus C)$ ②

Soit : $x\in A\setminus B\Rightarrow x\in A \quad et \quad x\notin B \quad\Rightarrow x\notin B\setminus C$

$\Rightarrow x\notin B\setminus C\Rightarrow x\in A\setminus(B\setminus C)$

Donc : $A\setminus B\subset A\setminus(B\setminus C)$

① et ② $\Rightarrow(A\cap C)\cup(A\setminus B)\subset A\setminus(B\setminus C)$

Finalement : $A\setminus(B\setminus C)=(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

2) Montrons que : $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

$A\setminus(B\cap C)=A\cap\left(\overline{B\cap C}\right)=A\cap\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)$

$=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap\overline{C}\right)$(Loi de Morgan)

$=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

3) Montrons que : $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

a) Montrons que : $(A\setminus B)\cap C\subset(A\cap C)\setminus(A\cap B)$

Soit : $x\in(A\setminus B)\cap C\Rightarrow x\in A\setminus B \quad et \quad x\in C$

$\Rightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)\text{et } x \in C \Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et}(x \in A \text{ et} x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in A \cap C) \text{ et}(x \notin A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B)$

D'où : : $(A \setminus B) \cap C \subset (A \cap C) \setminus (A \cap B)$

b) Montrons que : $(A \cap C) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cap C$

Soit : $x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \cap C) \text{ et}(x \notin A \cap B)$

$\Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et}(x \notin A \text{ ou } x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in C \text{ et } x \notin A) \text{ ou}(x \in A \text{ et } x \in C \text{ et } x \notin B)$

$\Rightarrow (x \in \varnothing) \text{ ou}(x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et} x \in C) \Rightarrow ((x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et} x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A - B) \text{ et}(x \in C) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap C$

D'où : : $(A \cap C) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cap C$

Conclusion : $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (A \cap B)$

Exercice8 : Soient A ; B ; C des parties d'un Ensemble E ; Monter que :

1) $A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

3) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Solution :1) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$

$= [(A \cap B) \cap (C \cup \overline{C})] \cup [(A \cap \overline{B}) \cap (C \cup \overline{C})]$

$= [(A \cap B) \cap E] \cup [(A \cap \overline{B}) \cap E] = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A)$

$= (B \cap (C \cup A)) \cup ((A \cap C) \cap (C \cup A)) = (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C)$

3) Montrons que : $\begin{cases} A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap B = A \cap C \\ A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \end{cases}$

$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap \overline{C}} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{C}}$

$\Rightarrow \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C \Rightarrow A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap (\overline{A} \cup C)$

$\Rightarrow (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap C) \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

Inversement : $A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}} \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$
D'après l'implication directe
Donc : $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Exercice9 : Soient A ; B ; C trois parties d'un ensemble $E = \{a; b; c; d; e\}$ telles que :

$A \cup B = \{b; c; d; e\}$; $A \cap B = \{b; d\}$; $A \cap C = \{b; c\}$ et $A \cup C = \{a; b; c; d\}$

1) Déterminer : A ; B ; C

2) Déterminer : $A \cup (B \cap C)$; $A \cap (B \cup C)$; $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B}$

3) Déterminer : $A \Delta B$; $B \Delta C$ et $C \Delta A$

Et vérifier que : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

Solution :1) $A = \{b; c; d\}$; $B = \{b; d; e\}$; $C = \{a; b; c\}$

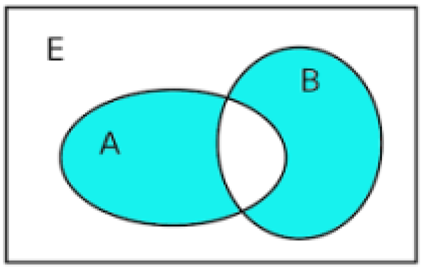
2) $B\cap C=\{b\}$ et $A\cup(B\cap C)=\{b;c;d\}$

$A\cap(B\cup C)=\{b;c;d\}$;

$\overline{A\cup B}=\{a\}$; $\overline{A\cap B}=\{a;c;e\}$

3) $A\Delta B= =(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$A\Delta B=\{c;e\}$ et $B\Delta C=\{a;c;d;e\}$



$C\Delta A=\{a;d\}$

$(A\Delta B)\Delta C=\{c;e\}\Delta\{a;b;c\}=\{a;b;e\}$

$A\Delta(B\Delta C)=\{b;c;d\}\Delta\{a;c;d;e\}=\{a;b;e\}$

Donc : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

Exercice10 : Soient les ensembles suivants : $A=\left\{\frac{6n-2}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{3n+1}{12}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{1}{12}\in B$ et $\frac{1}{12}\notin A$

2) Montrer que : $A\subset B$

3) Est-ce qu'on a : $A=B$?

Solution :1) a) Montrons que : $\frac{1}{12}\in B$

$\frac{1}{12}\in B \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\frac{1}{12}=\frac{3n+1}{12} \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/3n+1=1$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/3n=0 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=0\in\mathbb{Z}}$

Il suffit de prendre : $n=0$

On peut vérifier que : $\frac{3n+1}{12}=\frac{3\times 0+1}{12}=\frac{1}{12}$

Par suite : $\frac{1}{12}\in B$

b) Montrons que : $\frac{1}{12}\notin A$

Supposons par l'absurde que : $\frac{1}{12}\in A$

$\frac{1}{12}\in B \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\frac{1}{12}=\frac{6n-2}{12}$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/6n-2=1$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/6n=3 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}}$

Contradiction : Donc : $\frac{1}{12}\notin A$

2) Montrons que : $A\subset B$

Soit : $r \in A$ Montrons que : $r \in B$?

$r \in A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / r = \frac{6n-2}{12}$

Pour montrer que : $r \in B$ Il suffit de trouver un : $n' \in \mathbb{Z}$ tel que : $r = \frac{3n'+1}{12}$

1ier méthode : $r = \frac{3n'+1}{12}$ et $r = \frac{6n-2}{12}$

Donc : $\frac{3n'+1}{12} = \frac{6n-2}{12}$

Donc : $3n'+1 = 6n-2 \Leftrightarrow 3n' = 6n-3 \Leftrightarrow n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$

Donc : Il suffit de prendre : $n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$

Par suite : $r \in B$

Conclusion : $A \subset B$

2ier méthode : Pour montrer que : $r \in B$ Il suffit de trouver un : $n' \in \mathbb{Z}$ tel que : $r = \frac{3n'+1}{12}$

$r \in A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / r = \frac{6n-2}{12}$

$r = \frac{6n-2}{12} = \frac{3\times 2n-2}{12} = \frac{3\times 2n-3+3-2}{12}$

$r = \frac{3\times(2n-1)+1}{12} = \frac{3\times n'+1}{12}$

Avec : $n' = 2n-1 \in \mathbb{Z}$ car $n \in \mathbb{Z}$

Donc : $\exists n' \in \mathbb{Z} / r = \frac{3n'+1}{12}$; Par suite : $r \in B$

Conclusion : $A \subset B$

3) Comme : $\frac{1}{12} \in B$ et $\frac{1}{12} \notin A$ alors : $B \not\subset A$

Par suite : $A \neq B$

Exercice11 : Soit l'ensemble : $E = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+xy-2y^2+5=0\right\}$

1) a) Vérifier que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+xy-2y^2 = (x-y)(x+2y)$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E \cap \mathbb{Z}^2$

c) Montrer que : $E = \left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right) / t \in \mathbb{R}^*\right\}$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants : $A = \{0;1;4;9;16;...\}$ et $B = \left\{-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$

$C = \{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

Solution : 1) a) $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)(x+2y) = x^2+2xy-xy-2y^2 = x^2+xy-2y^2$

b) $(x;y) \in E \cap \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x;y) \in E$ et $(x;y) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = -5$ et $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow (x;y) \in \mathbb{Z}^2 \begin{cases} x-y=-5 \\ x+2y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=5 \\ x+2y=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+2y=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=-5 \end{cases}$

Donc : $E \cap \mathbb{Z}^2 = \{(-3;2);(3;-2);(1;2);(-1;-2)\}$

c) $(x;y) \in E \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=t \\ x+2y=\frac{-5}{t} \end{cases}$: $t \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \left(x=\frac{2t^2-5}{3t} ety=\frac{-t^2-5}{3t} \right): t\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

Donc : $E=\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

2) $A=\{k^2;k\in\mathbb{N}\}$ et $B=\left\{\frac{(-1)^k}{k};k\in\mathbb{N}^*\right\}$; $C=\{1+3n;n\in\mathbb{Z}\}$

Exercice12 : Soit E un ensemble et G et H deux parties de E

On note : $\mathcal{P}(G)$: l'ensemble des parties de l'ensemble G

1) Montrer que : $\mathcal{P}(G\cap H)=\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

2) Montrer que : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cup H)$

3) Montrer que : on général on n'a pas : $\mathcal{P}(G\cup H)=\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)$

Solution : Remarque : $X\subset E\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(E)$

1) $X\in\mathcal{P}(G\cap H)\Leftrightarrow X\subset G\cap H$

$\Leftrightarrow X\subset G$ et $X\subset H$

$\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(G)$ et $X\in\mathcal{P}(H)$

$\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

Par suite : $\mathcal{P}(G\cap H)=\mathcal{P}(G)\cap\mathcal{P}(H)$

2) On a : $G\subset G\cup H$ et $H\subset G\cup H$

Donc : $\mathcal{P}(G)\subset\mathcal{P}(G\cap H)$ et $\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cap H)$

Donc : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\subset\mathcal{P}(G\cup H)$

3) $H=\{2\}$ et $G=\{1\}$

On a : $H\cup G=\{1;2\}$

$\mathcal{P}(G\cup H)=\{\varnothing;\{1\};\{2\};\{1;2\}\}$

$\mathcal{P}(G)=\{\varnothing;\{1\}\}$ et $\mathcal{P}(H)=\{\varnothing;\{2\}\}$

$\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)=\{\varnothing;\{1\};\{2\}\}$

Donc : $\mathcal{P}(G)\cup\mathcal{P}(H)\neq\mathcal{P}(G\cup H)$

Exercice13 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{3x-1}{x+1}\end{array}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ $f(x)=3-\frac{4}{x+1}$

2) Déterminer : $f(K)$ avec $K=]-\infty;-1[$

Solution : 1) $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $3-\frac{4}{x+1}=\frac{3x+3-4}{x+1}=\frac{3x-1}{x+1}=f(x)$

2) $x\in K\Leftrightarrow x\prec -1\Leftrightarrow x+1\prec 0\Leftrightarrow -\frac{4}{x+1}\succ 0$

$\Leftrightarrow 3-\frac{4}{x+1}\succ 3\Leftrightarrow g(x)\in]3;+\infty[$ Donc $f(K)=]3;+\infty[$

Exercice14 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ et $A=[-1;4]$

Déterminer :

1) L'image directe de A par f.

2) L'image réciproque de A par f.

Solution : 1) On a : $f(A)=f([-1;4])=\{f(x)\in\mathbb{R}/-1\le x\le 4\}$

Or : $A=[-1;4]=[-1;0]\cup[0;4]$

Alors : $f([-1;4])=f([-1;0])\cup f([0;4])$

Il est clair que : $-1\le x\le 0 \Rightarrow 0\le x^2\le 1$ et $0\le x\le 4\Rightarrow 0\le x^2\le 16$

Ainsi : $f([-1;4])=[0;1]\cup[0;16]=[0;16]$

2) $f^{-1}([-1;4])=f^{-1}([-1;0])\cup f^{-1}([0;4])$ Or : $f^{-1}([-1;0])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[-1;0]\}$

$f^{-1}([-1;0])=\{x\in\mathbb{R}/-1\le f(x)\le 0\}=\{0\}$ et $f^{-1}([0;4])=\{x\in\mathbb{R}/0\le f(x)\le 4\}$

$0\le f(x)\le 4 \Leftrightarrow 0\le x^2\le 4 \quad \Leftrightarrow \sqrt{0}\le\sqrt{x^2}\le\sqrt{4} \quad \Leftrightarrow 0\le |x|\le 2$

Ainsi : $f^{-1}([0;4])=[-2;2]$

D'où : $f^{-1}([-1;4])=\{0\}\cup[-2;2]=[-2;2]$

Exercice15 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$ et Considérons les ensembles :

$A=[0;2\pi]$; $B=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $C=\mathbb{R}$

Déterminer :

1) L'image directe des ensembles : A ; B et C par f.

2) L'image réciproque des ensembles : $A'=[0;1]$; $B'=[3;4]$ et $C'=[1;2]$ par f.

Solution : 1) On a : $f(A)=f([0;2\pi])=\{f(x)\in\mathbb{R}/0\le x\le 2\pi\}=[-1;1]$

$f(B)=f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left\{f(x)\in\mathbb{R}/0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}=[0;1]$

$f(C)=f(\mathbb{R})=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}=[-1;1]$

2) $f^{-1}([0;1])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[0;1]\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi;2k\pi+\pi]$

$f^{-1}([3;4])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[3;4]\}=\varnothing$

$f^{-1}([1;2])=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in[1;2]\}=\{x\in\mathbb{R}/\sin(x)=1\}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x+\sqrt{x} \end{array}$

f est-elle injective ?

Solution : Soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\sqrt{x_1}=x_2+\sqrt{x_2}$

$\Rightarrow(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1)=0\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$ ou $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1=0$

Or $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1\ne 0\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$

$\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

Donc f est injective

Exercice17: Soit l'application : $f:\mathbb{R}^+ \to]-\infty;3]$
$x \mapsto 3-x^2$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty;3]$.

Solution : Soient $y \in]-\infty;3]$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x)=y \Leftrightarrow 3-x^2=y \Leftrightarrow x^2=3-y$ Or $y \in]-\infty;3]$ donc $y \le 3$ c'est-à-dire : $0 \le 3-y$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3-y}$ Car $x \in \mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall \boldsymbol{y} \in]-\infty;3])(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Exercice18 : Soit l'application : $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2-3x+2$

f Est-elle injective ?

Solution : On a : $f(1)=f(2)=0$ mais $1 \neq 2$

Ceci signifie que l'application f n'est donc pas injective.

Exercice19 : Soit l'application f : $:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2+2x-3$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?

Solution : Si je trouve : $x \neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

$f(x)=f(y) \Leftrightarrow x^2+2x-3=y^2+2y-3$

$\Leftrightarrow x^2+2x=y^2+2y \Leftrightarrow x^2-y^2+2x-2y=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)+2(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+2)=0$

$\Leftrightarrow x-y=0 \quad ou \; x+y+2=0$

$\Leftrightarrow x=y \quad ou \; \boxed{x+y=-2}$

Si je prends : $x=-3$ et $y=1$ alors : $\boxed{x+y=-2}$

On a : $f(1)=f(-3)=0$ mais $1 \neq -3$

En effet : $f(-3)=(-3)^2+2(-3)-3=0$ et $f(1)=1^2+2-3=0$

Donc : f n'est pas injective

<u>Remarque :</u> on peut répondre directement comme suit : $f(x)=x^2+2x-3$

$f(x)=-3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=-3 \Leftrightarrow x^2+2x=0$

$f(x)=-3 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \; ou \; x=0$

$f(x)=-3 \Leftrightarrow x=-2 \; ou \; x=0$

On a : $f(0)=f(-2)=0$ mais $0 \neq -2$

Donc : f n'est pas injective.

2) $f(x)=x^2+2x-3=x^2+2x+1-1-3=(x+1)^2-4$

Donc : $f(x)-(-4)=(x+1)^2 \ge 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \ge -4$

Par exemple : -5 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=-5$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

Exercice20 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \left]0;1\right] \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2-2x+2} \end{aligned}$

Montrer que f est surjective

Solution : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$

Soient $y\in\left]0;1\right]$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$

$f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-2x+2}=y \Leftrightarrow 1=y\left(x^2-2x+2\right)$

or $x^2-2x+2\neq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$ car $\Delta \prec 0$

$\Leftrightarrow yx^2-2xy+2y-1=0$

Le discriminant de l'équation est :

$\Delta=(-2y)^2-4y\times(2y-1)=4y(1-y)$

Comme : $0\prec y\leq 1$ alors : $1-y\geq 0$ et donc : $\Delta\geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions dans $\mathbb{R}$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.

Exercice21 : Soit l'application f : $\begin{aligned} :\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2+x+2 \end{aligned}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1-x)=f(x)$

2) f est-elle injective ?

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=-\dfrac{1}{4}$

4) f est-elle surjective ?

5) Montrer que : $f(\mathbb{R})=\left[\dfrac{7}{4};+\infty\right[$

Solution : 1) Montrons que : $f(-1-x)=f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-1-x)&=(-1-x)^2+(-1-x)+2 \\ &=(1+x)^2+-1-x+2=x^2+2x+1+-1-x+2 \\ &=x^2+x+2=f(x) \end{aligned}$$

2)Si je trouve : $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

On a : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1-x)=f(x)$

Si je prends : $x=0$

On a : $f(-1)=f(0)$ mais $0\neq -1$

Donc : f n'est pas injective

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=1$

$f(x)=1 \Leftrightarrow x^2+x+2=1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3\prec 0$

Donc : $S=\varnothing$

4)Par exemple : 1 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x)=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

5) Montrons que : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

On raisonne par double inclusion :

a) Montrons que : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Soit : $x\in\mathbb{R}$ Montrons que : $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

C'est-à-dire Montrons que : $\frac{7}{4}\leq f(x)$

$f(x)-\frac{7}{4}=x^2+x+2-\frac{7}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$

$\Delta=1^2-4\times\frac{1}{4}\times 1=0$ Donc : $x^2+x+\frac{1}{4}\geq 0$

Donc : $f(x)-\frac{7}{4}\geq 0$ C'est-à-dire $f(x)\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Alors : $f(\mathbb{R})\subset\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

a) Inversement montrons que : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Soit : $y\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Montrons que : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$?

$f(x)=y\Leftrightarrow x^2+x+2=y\Leftrightarrow x^2+x+2-y=0$

$\Delta=1^2-4\times(2-y)=-7+4y$

Comme : $\frac{7}{4}\leq y$ alors : $-7+4y\geq 0$

Alors l'équation admet une ou deux solutions :

$x=\frac{-1+\sqrt{-7+4y}}{2}\in\mathbb{R}$ ou $x=\frac{-1-\sqrt{-7+4y}}{2}\in\mathbb{R}$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Donc : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Conclusion : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Exercice22 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\to\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\\ x\mapsto f(x)=\frac{5}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}} \end{array}$

Montrer que : f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : Soit : $y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$: Résolvons dans : $\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ l'équation $f(x)=y$

Soit : $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$: $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{5}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=y \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}=y-\frac{5}{2}$

$x+\frac{1}{4}\geq 0$ car $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ et $y-\frac{5}{2}\geq 0$ car $y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

$f(x)=y \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ Et on a : $\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq -\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$

Donc : $\forall y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$ $\exists! x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$ tel que : $f(x)=y$

Donc : f est bijective.

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x \in \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y)=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \\ y \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

Donc : $\forall x \in \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$; $f^{-1}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$f^{-1}:\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\to \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$

$x \mapsto f^{-1}(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

Exercice23 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x+y \ ; x-y) \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Solution : 1) Soit : $(x;y)$; $(x';y') \in \mathbb{R}^2$

Tel que : $f(x;y)=f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y)=(x';y')$??

$f(x;y)=f(x';y') \Leftrightarrow (x+y \ ; x-y)=(x'+y' \ ; x'-y')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x'+y' & (1) \\ x-y=x'-y' & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x=2x' \Rightarrow x=x'$

$x+y=x'+y' \quad (1) \quad \Rightarrow x+y=x+y'=0 \Rightarrow y=y'$

$\Rightarrow x=x'$ et $y=y' \Rightarrow (x;y)=(x';y')$

Donc : f est injective

2) Soit : $(z;t) \in E \times E$; $\exists ?(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(x;y)=(z;t)$??

$$f(x;y)=(z;t) \Leftrightarrow (x+y \ ; x-y)=(z;t) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=z & (1) \\ x-y=t & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$ et $(1)-(2)$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x &= z+t \\ 2y &= z-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{z+t}{2} \\ y &= \dfrac{z-t}{2} \end{cases}$ Donc : f surjective

3) Déterminons f^{-1} la bijection réciproque de f

f est injective et surjective donc bijective

$$f(x;y)=(z;t) \Leftrightarrow (x;y)=f^{-1}(z;t)=\left(\frac{z+t}{2};\frac{z-t}{2}\right)$$

Donc : f^{-1} : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2};\dfrac{x-y}{2}\right) \end{array}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien